Série A: nº 3924

Nº d'ordre: 4775

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

le Gradè de Docteur ès Sciences Mathématiques

PAR

ALBERT HANEN

PREMIÈRE THÈSE

THÉORÈMES LIMITES POUR UNE SUITE DE CHAINES DE MARKOV

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 12 juin 1962

devant la Commission d'examen

M. Ch. EHRESMANN, président,

MM. R. FORTET et J. NEVEU, examinateurs,

---

e A: nº 3924

Nº d'ordre: 4775

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

le Gradè de Docteur ès Sciences Mathématiques

PAR

ALBERT HANEN

PREMIÈRE THÈSE

THÉORÈMES LIMITES POUR UNE SUITE DE CHAINES DE MARKOV

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

soutenues le 12 juin 1962
devant la Commission d'èxamen

M. Ch. EHRESMANN, président,
MM. R. FORTET et J. NEVEU, examinateurs,

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY

G.	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
ROGLIE	T	Théories physiques.
ANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
SÉ	T	Évolution des êtres organisés.
OST	T	Chimie organique.
DRON	T	Chimie appliquée
RT.....	T	Minéralogie et Cristallographie.
IER	T	Zoologie.
ENOT	T	Biologie Végétale (Orsay).
R	T	Physique quantique et Relativité.
IER	T	Physiologie Générale.
EAU	T	Paléontologie.
RD	T	Physique (E.N.S.).
AN	T	Mathématiques (E.N.S.).
TTE.....	T	Chimie générale.
RD	T	Géométrie supérieure.
OMB	T	Physique du Globe
Cousin	T	Biologie Animale (S.P.C.N.).
TIEN	T	Chimie minérale.
H	T	Zoologie.
LER	T	Physique (E.N.S.).
USSI	T	Génétique.
RE	T	Géologie (S.P.C.N.) et sédimentologie.
HERET	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
S R.	T	Recherches Physiques.
AS A.....	T	Biologie cellulaire.
LF	T	Optique appliquée.
ND	T	Physique Enseignement.
LLET	T	Physique (P.C.B.).
IER	T	Mécanique exp. des Fluides.
ON	T	Astronomie.
.....	T	Biologie maritime.
EY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
IEN	T	Embryologie.
HORN	T	Botanique.
UGNAC	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Lauchois	T	Chimie Physique.
LIER	T	Physique du Globe.
RITIER	T	Biologie Générale (Orsay).
ET	T	Radioélectricité (Orsay).
IN	T	Mécanique Générale.
EIL	T	Arithmétique et théorie des Nombres.
ET	T	Chimie organique.
IARD	T	Géophysique appliquée.
PETIER	T	Chimie macromoléculaire.
LLIER	T	Micropaléontologie.
.....	T	Pétrographie.
LAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
IANN	T	Chimie organique et structurale.
UINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
Y	T	Physique de l'atmosphère.
OUCHES	T	Théories Physiques.
L	T	Chimie générale.
RT	T	Minéralogie et Cristallographie.
IEU J. P.	T	Physique (Optique).
EAUX.....	T	Biologie animale (P.C.B.).
.....	T	Zoologie (Orsay).
UET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
MANN	T	Biologie Végétale marine.
IER	T	Physique des Solides (Orsay).
.....	T	Physiologie comparée.
ET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
ARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
ARD.....	T	Physiologie végétale.
VARD	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).
OT	T	Calcul différentiel et intégral.
IANT	T	Synthèse organique générale.
RD.....	T	Chimie Minérale.
T	T	Botanique (E.N.S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques Mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie Végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et Appliquée.
KIRRMANN	T	Théories Chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie Comparées.
EHRESMANN	T	Topologie Algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S.P.C.N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
PISOT	T	Techn. Mathém. de la Phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M.G.P.).
RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique Théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
LEVY M.	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie Végétale (P.C.B.).
PIAUX	T	Chimie (M.P.C.).
BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LEDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.).
BELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E.N.S.).
MICHEL A.	T	Chimie Minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie Physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie Végétale B.M.P.V.
CASTAING	T	Physique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie Végétale (Orsay).
NOIROT	T	Évolution des Êtres Organisés.
PANNETIER	T	Chimie générale (Orsay).
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie théorique.
TEILLAC.....	T	Physique Nucl. et Radio-activité.
TONNELAT	T	Biologie Physico-chimique.
VILLE.....	T	Économétrie.
WILLEMART	T	Chimie (P.C.B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches Physiques.
GUINOCHET	T	Biologie Végétale S.P.C.N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie (P.C.B.).
Mlle JOSIEN.....	T	Chimie (S.P.C.N.)
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE.....	T	Mathématiques (Orsay).
DENY	T	Mathématiques Générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécan. théor. des fluides.

Lucas G.	T	Géologie.
Allard	T	Chimie Physique.
Berthelot	T	Phys. Fondamentale des Hautes Énergies (Orsay).
Bricart	T	Météorologie et phys. de l'Atmosphère.
Mme Albe-Fessard	T	Psychophysiologie.
Friedel	T	Physique des Solides (Orsay).
Julia M.	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.
Lender	T	Biologie Animale S.P.C.N. (Orsay).
Magat	T	Physico-chimie des radioéléments.
Mlle Quintin	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiologie animale (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Haissinsky	T	Radiochimie.
Lemee	T	Physiol. Vég. B.M.P.V. (Orsay).
Guérin	T	Chimie M.P.C. (Orsay).
Chatelet M.	T	Chimie (P.C.B.).
Jean	T	Physique Nucléaire (Orsay).
Mattler	T	Physique (S.P.C.N.).
Michel L.	T	Phys. Théor. des Hautes Énergies (Orsay).
Bergerard	T	Zoologie (Orsay).
Bertein	T	Électronique (Orsay).
Bouissières	T	Chimie des Radioéléments (Orsay).
Mme Couture	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
Ellenberger	T	Géologie appliquée sur le terrain.
Franc.	T	Biologie animale (P.C.B.).
Schnell	T	Botanique tropicale (Orsay).
Stolkowski	T	Physiologie générale.
Acher	T	Chimie Biologique (Orsay).
Baudoin	T	Biologie animale (P.C.B).
Beaumont	T	Biologie animale (S.P.C.N).
Blamont	T	Géophysique Ionosphère.
Bourreau	T	Botanique.
Curie D.	T	Physique (M.G.P.).
Durand-Delga	T	Géologie
Freon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller	T	Physiologie végétale.
Tortrat	T	Calcul des Probabilités.
Cailleux	T	Géologie (S.P.C.N.).
Magnan	T	Physique (S.P.C.N.).
Daudel	T	Mécanique ondulatoire appl. à Chimie Théorique et à la Phys nucléaire.
Mlle Fourcroy	T	Biologie Végétale (S.P.C.N.).
Mme Choquet-Bruat	T	Mécanique Analytique et Mécan céleste.
Mlle Veil	T	Physiologie Générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique Physique et Expérimen
Lacombe	T	Métallur. des métaux Nucléaires.
Brochard	T	Physique P.C.B. (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Mathématiques M.P.C. (Orsay).
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire	T	Géographie physique et Géo Dynamique.
Comolet	T	Mécanique des Fluides.
Corabœuf	T	Physiologie Animale.
Delloue	T	Physique de l'exosphère.
Gorenflot	T	Botanique II (Orsay).
Houillon	T	Biologie Animale (P.C.B.).
Jullien J.	T	Chimie (P.C.B.).
Malgrange	T	Technique Mathématique de la sique.
Olivier	T	Anthropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre	T	Physique E.N.S. (Orsay).
Chevaugeom	T	Botanique (Orsay).

Secrétaire général..... R. Poullain.

à ma femme

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538121_0036

Errata

Page 13 - 3 lignes avant la fin lire $\varphi_{\ell,t} = \Big) w : \begin{matrix} w_i \geq 0 \\ \sum_{\ell-1}^{\ell+1} w_i = t \end{matrix} \Big($

page 20 - 10 lignes avant la fin lire $\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} f(\lambda)\, R(\lambda, T)\, d\lambda$

page 31 - ligne 11 lire $\xi_j(n - \lambda_1 + 1)$

page 38 - ligne 17, lire $A A_{2,k} + A_2 B_2^k, \ldots A A_{\ell,k} + A_\ell B_\ell^k$

page 39 - ligne 7 , lire $V_o = \begin{pmatrix} V_o^t \\ V_o^1 \\ \vdots \\ V_o^r \end{pmatrix}$

page 58 - ligne 8, lire $(\sum E(\lambda_{\alpha g}))$

page 63 - 4 lignes avant la fin, lire $D_{\frac{u}{n}}^{k_1}$

page 65 - ligne 8, lire $n(1-\lambda_{i\,o,n})E(\lambda_{i\,o,n}) \geq \sum_{j \neq i} n\, E(\lambda_{i\,o,n})\, S_{i,j}^n\, V_o^j$

page 66 - ligne 16, lire $A_{\alpha, k_1, \ldots k_\ell}(t) \cap A(t)$

page 76 - ligne 11, lire $> \delta$ (au lieu de $> o$)

page 80 - lignes 10 et 16, lire $R_{l^n}^n \quad D_{\frac{u}{\sqrt{n}}}^l$

page 102 - ligne 4, lire ergodique (au lieu de ergotique)

page 103 - ligne 2, lire $i\, p_{j,j} \cdot e^{iu_j}$

page 104 - fin de la ligne 5 $\left[\sum_{h'h' \neq j} (\lambda \varphi_{h,h',j} + \varphi_{h,h'}) \right]$

.....

page 110 - ligne 5, lire $a_1(u)$ (au lieu de $\alpha_1(u)$)

dernière ligne, lire e^{γ}

page 111 - fin de la ligne 4, lire $(\mathbb{Z} = \lambda_{o,u} + \theta(\lambda_{o,n,u} - \lambda_{o,u}))$

ligne 14, lire $- G(u, \lambda_o, u)$

page 119 - ligne 6, lire $(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}$

page 120 - ligne 11, lire $- \dfrac{1}{n\sqrt{s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)}} \Big]$

page 122 - lignes 8, 10, 13, lire $i_o \in E_1$

page 138 - ligne 9, lire $G(z)$

NOTATIONS

$\longrightarrow$: tend vers

$\Longrightarrow$: entraine

$\Longleftrightarrow$: équivalent

$\forall$: quel que soit

$\exists$: il existe

$\in$: élément de

R : droite numérique

$x , y \quad R , x = y \bmod (d) \Longleftrightarrow x - y = k\,d$, où k entier

$y_n = o(x_n) \Longleftrightarrow \frac{y_n}{x_n} \longrightarrow 0$

$y_n = O(x_n) \Longleftrightarrow \frac{y_n}{x_n}$ reste borné

) w : ... (ensemble des points w vérifiant ce qui vient après :

{ } : l'évènement : ce qui est à l'intérieur de { } a lieu

Pr : probabilité

$\mathbb{1}_A$: indicateur d'un évènement (valant 1 si A se produit,
0 si A ne se produit pas)

E : espérance mathématique

Pr (A/B) : Probabilité conditionnelle de A quand B a lieu

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$: converge en loi.

INTRODUCTION

§§ 1.- CHAINE DE MARKOV - CAS DISCRET -

Soit X_i une suite de variables aléatoires pouvant prendre les valeurs 1 , 2 , ... r ; i parcourt l'ensemble des entiers $\geqslant 0$.

X_i peut s'interpréter comme l'état à l'instant i d'un système physique S ayant r états possibles notés 1 , 2 , ... r, dont l'évolution est aléatoire et se fait aux instants entiers.

La suite de variables aléatoires X_i forme une chaine de Markov discrète homogène, de matrice de transition P , si les conditions suivantes sont réunies:

1) pour tous k , j , conditionnellement lorsque $X_k = j$, les évènements définis sur la suite de variables aléatoires X_i antérieurs à k et ceux postérieurs à k sont indépendants.

2) $\Pr\left[\left\{ X_{k+1} = \ell \right\} / \left\{ X_k = j \right\} \right] = p_{j,\ell}$, pour tout k .

La matrice P a pour éléments $p_{j,\ell}$ et possède les propriétés suivantes :

a) $p_{j,\ell} \geqslant 0$ pour tous j, ℓ

b) $\sum_{\ell=1}^{r} p_{j,\ell} = 1$

toute matrice vérifiant (a) et (b) est dite strictement markovienne. On montre qu'il lui correspond une suite de variables aléatoires X_i dont elle est la matrice de transition.

Nous appellerons matrice (r,s) une matrice à r lignes et s colonnes

Soit P une matrice (r,r) strictement markovienne : soit $K = (1,2,...r)$ $K_1 \subset K$, P_1 la restriction de P à $K_1 \times K_1$. P_1 vérifie les propriétés :

a) $p_{j,\ell} \geqslant 0$, pour tout j , $\ell \in K_1$

b') $\sum_{\ell \in K_1} p_{j,\ell} \leq 1$, pour tout $j \in K_1$.

Une matrice P_1 vérifiant (a) et (b')est dite sous markovienne; étant donnée une matrice sous markovienne P_1 , on peut toujours la considérer comme une restriction d'une matrice strictement markovienne. Nous appellerons dans la suite système sous markovien attaché à P_1 tout système lié à une extension strictement markovienne de P_1.

Soit P une matrice strictement markovienne, S le système de loi d'évolution P. Nous dirons que l'état i communique avec j , et noterons par $\rightsquigarrow$ cette relation s'il existe un entier n tel que $P^{(n)}(i,j) > 0$ ($P^{(n)}$ désignant la $n^{\text{ième}}$ itérée de P).

La relation $i \rightsquigarrow j$, $j \rightsquigarrow i$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des états k tels que $k \rightsquigarrow k$.

Une classe d'équivalence C pour cette relation est dite ergodique si

$$i \rightsquigarrow j \ , \ i \in C \implies j \in C$$

Les éléments des classes ergodiques sont appelés états ergodiques.

Les autres états de S sont appelés transitoires.

Une classe ergodique C est fermée au sens suivant : si S prend un état de C , alors, avec une probabilité égale à 1, les états suivants appartiendront à C . On montre que les classes ergodiques sont les plus petites classes d'états fermées et qu'il n'y en a pas d'autres.

Chaque classe ergodique C se décompose à son tour en sous classes cycliques C_i, ... C_d , l'état succédant à un état de C_j (resp. C_d) appartenant presque surement à C_{j+1} (resp. C_1).

Rappelons également les propriétés spectrales de la matrice strictement markovienne P :

soit τ l'ensemble des états transitoires,

$E_1, \ldots E_s$ les classes ergodiques, $E = \bigcup_{i=1}^{s} E_i$

si T est la restriction de P à $\tau \times \tau$

R_i est la restriction de P à $E_i \times E_i$

B_i est la restriction de P à $\tau \times E_i$

Nous pouvons, par une permutation convenable de $(1, \ldots r)$, supposer que : $i \in \tau$, $j \in E \Longrightarrow i < j$

$i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, $\alpha < \beta \Longrightarrow i < j$.

P s'écrit alors :

$$P = \begin{pmatrix} T & B_1 & \ldots & B_i & \ldots & B_s \\ 0 & R_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_i & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & R_s \end{pmatrix}$$

Un nombre complexe λ appartient au spectre de P si et seulement si il appartient au spectre de T ou de l'un des R_i .

Soient ℓ_i le nombre d'éléments de E_i , V_0^i le vecteur à ℓ_i lignes toutes égales à 1

d_i le nombre de classes cycliques de E_i relatives à R_i

R_i a d_i valeurs propres de module égal à 1, qui sont les racines d_i èmes de l'unité. Ces valeurs propres sont simples.

Les autres valeurs propres de R_i ont un module < 1 .

Soit $\sqcap_i$ la matrice (ℓ_i, ℓ_i), vérifiant :

$$\begin{cases} \sqcap_i R_i = R_i \quad \sqcap_i = \sqcap_i \\ \sqcap_i V_0^i = V_0^i \end{cases}$$

$\sqcap_i$ a toutes ses lignes égales au vecteur $\sqcap_i^*$, appelé probabilité

invariante relative à $\underset{i}{R}$.

T sera supposée avoir θ éléments, nous désignerons sa norme par $\| \quad \|$.

T a sa valeur propre maximale $r_1 < 1$. Par conséquent, puisque, d'après le théorème de Gelfand,

$$\| T^n \|^{1/n} \longrightarrow r_1 \quad , \quad \| T^n \| < r^n \quad ,$$

où $0 < r < 1$, pour n assez grand .

§§ 2.- CHAINES DE MARKOV - CAS CONTINU -

Considérons une famille X_t de variables aléatoires, t parcourant la demi-droite numérique $\geqslant 0$, pouvant prendre chacune des valeurs $1 , 2 , \ldots r$. X_t peut alors interpréter comme l'état à l'instant t d'un système à nombre fini d'états r , dont l'évolution est aléatoire et peut se faire à tout instant $t \geqslant 0$.

La famille X_t forme une chaine de Markov continue et homogène, de semi-groupe de matrices de transition P_t , si les conditions suivantes sont réunies :

1) pour tous τ , j , conditionnellement lorsque $X_\tau = j$, les évènements définis sur X_t antérieurs à τ et ceux postérieurs à τ sont indépendants.

2) pour tout τ , $\Pr \left[\left\{ X_{t+\tau} = j \right\} / \left\{ X_\tau = i \right\} \right] = P_t(i,j)$

Les matrices P_t d'éléments $P_t(i,j)$ forment un semi-groupe, que nous supposerons continu à l'origine.

Soit I la matrice identité sur C^r , d'éléments $\delta_i^{\,j} = 0$ si $i \neq j$; 1 si $i = j$.

Si $P_0 = I$, alors la matrice P_t peut s'exprimer sous la forme :

$$P_t = \exp (\mathcal{Q}\, t)$$

où $\mathfrak{A}$ est la matrice limite de $\frac{P_t - I}{t}$, lorsque $t \longrightarrow 0$.

En particulier, si $i \neq j$, $\mathfrak{A}(i,j) \geqslant 0$ (a)

si $i = j$, $\mathfrak{A}(i,j) \leqslant 0$ (b)

et de plus $\mathfrak{A} V_0 = 0$

où V_0 désigne le vecteur à r lignes égales à 1

toute matrice $\mathfrak{A}$ vérifiant (a) et (b) s'appelle opérateur infinitésimal strictement markovien.

De même que dans le cas discret, on introduit des opérateurs infinitésimaux sous markovien, vérifiant (a) et la condition

$$\mathfrak{A} V_0 \leqslant 0 \qquad (b')$$

soit $K = (1 , 2 , \ldots r)$. Si $\mathfrak{A}$ est un opérateur infinitésimal sous markovien, $\exp(\mathfrak{A} t)$ peut être considéré comme la restriction à $K * K$ d'un semi-groupe de matrices de transition strictement markoviennes $(r+1,r+1)$, d'opérateur infinitésimal $\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & , & B \\ 0 & , & 0 \end{pmatrix}$

où $B = - \mathfrak{A} V_0$. Nous appellerons système associé à $\mathfrak{A}$ le système associé à $\mathfrak{A}_1$ de la manière définie plus haut.

§§ 3.- OBJET ET RESUME DU PRESENT TRAVAIL - PRINCIPAUX RESULTATS -

Soit S un système physique à nombre fini d'états r . Il a une suite de lois d'évolution markoviennes, homogènes et discrètes, représentées par des matrices strictement markoviennes P_n. Nous noterons ${}^{(n)}S$ le système S muni de la loi P_n .

Soient : ${}^{(n)}X_k$ l'état de ${}^{(n)}S$ à l'instant k .

${}^{(n)}\xi_j(k)$ le nombre de passages de ${}^{(n)}S$ par j en k épreuves

f une fonction numérique définie sur 1,2, .. r , telle que $f(j) = u_j$.

Les sommes ${}^{(n)}S_n = \sum_{k=1}^{n} f({}^{(n)}X_k)$ ont un comportement asymptotique qui

se ramène, par l'identité ${}^{(n)}S_n = \sum_{j=1}^{r} {}^{(n)}\xi_j(n)\, u_j$, à celui de l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$.

L'étude de lois limites possibles et de théorèmes limites centraux correspondants pour l'ensemble de variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$, convenablement normées, est l'objet de ce travail.

On peut tout de suite faire la remarque suivante : la suite de matrices P_n est compacte au sens de la convergence par éléments. Il existe donc une sous suite n_k et une matrice P telle que $P_{n_k} \longrightarrow P$. Les lois limites possibles n'étant pas modifiées, nous pouvons supposer $P_n \longrightarrow P$.

Nous emploierons pour la matrice limite P les notations exposées au §§ 1 .

Soit R l'ensemble des nombres réels

$u = (u_1, \ldots u_r) \in (R)^r$

Du la matrice diagonale d'éléments $\exp(i\, u_k)$

V_0 le vecteur dont toutes les lignes valent 1 .

E désignant l'espérance mathématique, on montre, dans la suite, que

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n} i\, u_j\, {}^{(n)}\xi_j(n)\right) / \left\{ {}^{n}X_0 = i_0 \right\}\right] = (P_n \cdot Du)^n V_0\,(i_0)$$

Pℓ membre de gauche est la coordonnée i_0 du vecteur caractéristique des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_j(n)$.

Cette formule introduit la théorie de la perturbation d'opérateurs analytiques du type $P \cdot Du$. Elle permet d'affirmer que pour n assez grand et u assez petit, les spectres de $Pn \cdot Du$ et de P sont voisins, les projecteurs sur un ensemble spectral $\sigma_{i,n,u}$ de $Pn.. Du$ et de P voisin d'une valeur propre λ_i sont analytiques en u et de même dimension ; si celle-ci vaut 1, $\sigma_{i,n,u}$ se réduit alors à la fonction analytique $\lambda_{i,n,u}$.

Le chapitre 2 envisage le cas où $Pn \cong P$.

Lorsque P a une seule classe ergodique, Frechet, par la méthode analytique, Kolmogoroff et Doehlin par la méthode des temps de retour, Mihoc en utilisant le développement de $(P \,.\, Du)^n$ par la formule de Perron, ont donné les théorèmes limites correspondants. En utilisant les résultats du chapitre 1, qui donnent une expression asymptotique de $(P \,.\, Du_n)^n$, lorsque $u_n \longrightarrow 0$, plus fine que celle de Perron, on parvienr à montrer les théorèmes qui vont suivre.

Introduisons tout d'abord certaines notations :

Si τ , E_1 , ... E_s sont la classe des états transitoires et les classes ergodiques de P

$(u^t, u^1, \ldots u^s)$ la restriction de $u = (u_1, \ldots u_r) \in C^r$ à τ , E_1 , ... E_s

$Du^t, Du^1, \ldots Du^s$ les restriction de Du à τ , E_1, ... E_s

$V_0^t, V_0^1, \ldots V_0^s$ " V_0 "

I^t , I^1, ... I^s " I "

$< u^i , \Gamma_i^* >$ = produit scalaire des vecteurs u^i et Γ_i^* (au sens habituel de somme des produits des coordonnées)

$(V_0'$ le vecteur à s lignes toutes égales à 1.

Théorème 1 -

Si P a une classe ergodique E_1 et des états transitoires τ , le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$\xi_t(n)$, $\dfrac{\xi_e(n) - n\ \Gamma_1^* e}{\sqrt{n}}$, où $t \in \tau$, $e \in E$, converge vers le

vecteur valant $(I^t - T \,.\, Du^t)^{-1}\ B_1\ \Phi_1 (u^1)\ V_0^1$ sur τ

$\Phi_1 (u^1)\ V_0^1$ sur E_1

$\Phi_1(u^1)$ est la fonction caractéristique d'une loi de Laplace multidimensionnelle, d'ordre $\leq \ell_1 - d_1$.

Théorème 2 -

Si P a plusieurs classes ergodiques et des états transitoires, le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_t(n)$, $\frac{\xi_e(n)}{n}$, où $t \in \tau$, $e \in \bigcup_{i=1}^{s} E_i$ converge vers le vecteur valant $(I^t - T\,Du^t)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{s} B_j \exp i \left(\langle U^j , \Gamma_j^* \rangle \right) V_0^j \right)$ sur τ

$\exp i \left(\langle U^j , \Gamma_j^* \rangle \right) V_0^j$ sur E_j

Le chapitre 3 aborde l'étude du cas général.

Koopman a commencé l'étude du cas $r = 2$, que Dobrouchine a complètement achevée. Il est bien évident que dans ce cas l'étude des lois marginales et celles de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_i(n)$ se confond, puisque $\xi_1(n) + \xi_2(n) = n$.

Les résultats de Dobrouchine sont les suivants :

Posons

$$P = \begin{pmatrix} p & , & q \\ \bar{q} & , & \bar{p} \end{pmatrix} \qquad P_n = \begin{pmatrix} p_n & , & q_n \\ \bar{q}_n & , & \bar{p}_n \end{pmatrix}$$

1.- P a une classe ergodique acyclique et pas d'états transitoires.

Alors $0 < \sup(p, \bar{p}) < 1$ et $\frac{\xi_1(n) - a_n}{b_n}$ converge en loi vers $N(0,1)$ (loi normale de moyenne nulle, de variance 1).

$$a_n = \frac{n\,\bar{q}_n}{q_n + \bar{q}_n} \quad , \quad b_n^2 = \frac{n\,q_n\,\bar{q}_n\,(p_n + \bar{p}_n)}{q_n + q_n} \quad .$$

2.- P a une classe ergodique, pas d'états transitoires et des cycles:

alors nécessairement $P = \begin{pmatrix} 0 & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{pmatrix}$

ou bien $n(P_n - P) \longrightarrow \mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ est une matrice $< \infty$, et alors $\xi_1(2n) - n$ converge en loi vers X , variable aléatoirs continue sur $(-\infty , +\infty)$
ou bien l'un des éléments de $\mathcal{Q}$ est infini, auquel cas on retrouve la loi normale de 1.- .

3.- P a un état transitoire :

$$P = \begin{pmatrix} p & , & q \\ 0 & , & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant p < 1$$

a) ou bien $n\,\bar{q}_n \longrightarrow a$; alors $\xi_1(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire X , somme de V variables aléatoires indépendantes et de même loi ζ_i ; V et ζ_i sont indépendantes, ζ_i suit une loi géométrique de paramètre p , $V - 1$ une loi de Poisson de paramètre a ; résultats symétriques si c'est 2 qui est transitoire.

b) ou bien $n\,\bar{q}_n \longrightarrow \infty$; alors $\dfrac{\xi_1(n)}{b_n} - a_n$ converge vers $N(0,1)$

4.- P a deux classes ergodiques :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ou bien $n(P_n - P) \longrightarrow \infty$, auquel cas on a la loi normale $N(0,1)$

b) ou bien $\begin{cases} n\,\bar{q}_n \longrightarrow a \\ n\,q_n \longrightarrow \infty \end{cases}$

alors la variable aléatoire $q_n\,\xi_1(n)$ converge en loi vers une variable aléatoire à valeurs entières, somme de V variables aléatoires indépendantes et de même loi ζ_i ; ζ_i a une loi exponentielle et $V-1$ une loi de Poisson de paramètre a , ζ_i et V sont indépendantes.

Résultats analogues si $n\,q_n \longrightarrow a$, $n\,\bar{q}_n \longrightarrow \infty$.

c) ou bien $n\,\bar{q}_n \longrightarrow a$, $n\,\bar{q}_n \longrightarrow b$

Dans ce cas, $\frac{\mathcal{E}_1(n)}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, qui peut s'interpréter comme le temps de séjour dans l'état 1 pendant un temps unité d'un processus de Markov continu à deux états, d'opérateur infinitésimal $\begin{pmatrix} -b & b \\ a & -a \end{pmatrix}$.

Dans tous ces théorèmes, l'état initial est 1.

L'extension du travail de Dobrouchine au cas d'un processus à nombre fini d'états $r > 2$ s'est faite par l'étude des lois marginales limites possibles et des théorèmes limites centraux correspondants.

IlyaChenko utilise la méthode des temps de retour à un état donné et l'expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $\alpha_n \mathcal{E}_{1,n,t}$ où $\mathcal{E}_{1,n,t}$ est le nombre de passages par l'état 1 en $[nt]$ épreuves ($[\ ]$ = partie entière), la loi d'évolution étant P_n. Il retrouve certaines lois limites de Dobrouchine et donne d'autres lois que nous pouvons également retrouver d'après nos résultats.

Meshalkin a fait une étude plus fine des lois marginales limites possibles, en utilisant une méthode analytique et l'interprétation probabiliste des mineurs centraux de la matrice $I - P$ (I matrice identité, P matrice strictement markovienne).

Venons en aux résultats du chapitre 3.

Lorsque P a plusieurs classes ergodiques (resp. des états transitoires), les restrictions de P_n à une classe P ergodique (resp. aux états P ergodiques), forment une suite de matrices sous markoviennes convergeant vers une matrice strictement markovienne n'ayant qu'une (resp. au moins une) classe ergodique et pas d'états transitoires. De telles matrices sont envisagées dans la suite.

Dans les théorèmes 3.1 et 3.2, on considère une suite P_n de matrices sous markoviennes, convergeant vers P strictement markovienne, n'ayant qu'une classe ergodique et pas d'états transitoires. Soit $K = (1,2, \ldots r)$, si P est une matrice (r,r).

Soit $\mu_n = (nw) + O(1)$, un entier > 0

$^{(n)}\xi_i(\mu_n)$ le nombre de passages par i d'un système sous markovien $^{(n)}S$ lié à P_n en u_n épreuves,

$^{(n)}X_k$ l'état de $^{(n)}S$ à l'instant k ,

$^{(n)}A_{\mu_n}$ l'évènement : $^{(n)}S$ reste en K jusqu'à l'instant μ_n au moins.

$|_{(n)A_{\mu_n}}$ son indicateur

$\lambda_{0,n}$ la valeur propre positive maximale de P_n .

Les théorèmes 3.1 et 3.2 donnent des expressions asymptotiques de $(P_n . Du_n)^{\mu_n}$, lorsque $u_n \longrightarrow 0$, en particulier pour $\mu_n = r \pmod d$ d étant le nombre de classes cycliques de P .

En interprétant $(P_n . Du_n)^{\mu_n}(i_0, j)$ comme

$$(1) \qquad E\left[\exp\Big(\sum_{j=1}^{r} i\, u_{nj}\, {}^{(n)}\xi_j(\mu_n)\Big)\,|_{(n)A_{\mu_n}}\,|_{\{(n)X_{\mu_n}=j\}} \Big/ \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right.$$

on montre que si $n(1 - \lambda_{0,n}) \longrightarrow s$,

a) $\Pr\left({}^{(n)}A_{\mu_n} / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right) \longrightarrow \exp(-sw)$

b) $E\left[\exp\Big(\sum_{j=i}^{r} i\, u_j \frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n)}{n}\Big)\,|_{(n)A_{\mu_n}} / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right] \longrightarrow$

$\exp(-sw)\exp(i\,w(\langle U, \Pi^* \rangle))\, V_0(i_0)$

c) Il existe une suite de constantes $^{(n)}a_i(\mu_n)$ telles que

$$E\left[\exp\Big(i \sum_{j=1}^{r} u_j \Big(\frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n) - {}^{(n)}a_j(\mu_n)}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\,|_{(n)A_{\mu_n}} / \{{}^{(n)}X_0 = i_0\}\right] \longrightarrow$$

$\exp(-sw)\,\phi(uw)$

ϕ et Π^* étant relatives à la matrice limite P .

En particulier, si P_n est strictement markovienne, et si $\mu_n = n$, la condition $n(1 - \lambda_{0,n}) \longrightarrow s$ est toujours vérifiée et l'ensemble des variables aléatoires $\dfrac{{}^{(n)}\xi_j(n) - {}^{(n)}a_i(n)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi multidimensionnelle de fonction caractéristique ϕ relative à F

Considérons maintenant une suite de matrices sous markoviennes P_n, convergeant vers une matrice P strictement markovienne, ayant s classes ergodiques $E_1, \ldots E_s$ et pas d'états transitoires, à laquelle nous appliquerons les notations du §§ 1 . On cherche le comportement asymptotique de $(P_n . D \frac{u}{n})^{\mu_n} (i_0, j)$, μ_n étant de la forme $nt + O(1)$, i_0 appartenant à E_α et j à E_β .

Soit ${}^{(n)}S$ un système sous markovien lié à P_n, ${}^{(n)}\xi_j(\mu_n)$, ${}^{(n)}X_k$, ${}^{(n)}A_{\mu_n}$ ont la même signification que ci-dessus, et la formule (1) est encore valable.

Soit ${}^{(n)}A_{\alpha, k_1, \ldots k_{\ell-1}, \beta, r_1, \ldots r_{\ell+1}, \mu_n}$, noté plus brièvement ${}^{(n)}A_{\alpha, k_i, \beta, r_i, \ell, \mu_n}$ l'évènement : ${}^{(n)}S$ reste en K au moins jusqu'à l'instant μ_n+1, v a successivement dans les classes ergodiques - P $E_\alpha, E_{k_1}, \ldots E_{k_{\ell-1}}, E_\beta$, restant dans les classes E_{k_i} un temps τ_i tel que $\tau_i - 1 = r_{i+1} \pmod d$.

Les lemmes 3.1 et 3.2 permettent alors d'écrire

$$E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} i u_j \frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n)}{n} \right) \Big|_{{}^{(n)}A_{\alpha, k_i, \beta, r_i, \ell, n}} \Big|_{{}^{(n)}X_{\mu_n} = j} \Big/ \left\{ {}^{(n)}X_0 = i_0 \right\} \right]$$

Comme une intégrale portant sur les durées de séjour relatives dans chaque classe ergodique · successive. Cette intégrale contient des termes du type de ceux envisagés aux théorèmes 3.1 et 3.2. Si on remplace ces termes par une approximation déduite de ces théorèmes, et si l'on somme les intégrales ainsi obtenues par rapport à k_i , r_i , ℓ , on montre qu'on obtient alors une approximation à $o(1)$ de $(\nu_n . D \underline{u}_n)^{\mu_n} (i_0,j)$ lorsque les conditions suivantes sont réunies (lemmes 3.3 , 3.4 , 3.5) .

a) $\mu_n = n\,t + 0\,(1)$

b) $n\,(1 - \lambda_{i\,0,n}) \longrightarrow q_i$, où $\lambda_{i\,0,n}$ désigne la valeur propre maximale de la restriction de P_n à $E_i * E_i$, notée R_{i^n}

c) $n\,S_{i,j^n}$ reste bornée, où S_{i,j^n} est la restriction de P_n à $E_i * E_j$.

Si, de plus, $n \langle \Gamma_i^* , S_{i,j^n} V_0^j \rangle \longrightarrow q_i^j$, avec les notations du §§ 1 , alors c) est remplie et $\sum_{j \in E_\beta} (P_n . D \underline{u}_n)^{u_n} (i_0,j)$ converge vers la série :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots k_{\ell-1}} \int_{\delta_{\ell,t}} \exp(-q_\alpha w_1) q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2) q_{k_1}^{k_2} \ldots \exp(-q_{k_\beta} w_{\ell+1})\, dw_1 \ldots dw_\ell$$

$$\delta_{\ell,t} \left(\begin{array}{l} w_i \geq 0, i=1,\ldots \ell+1 \\ \sum_{i=1}^{\ell+1} w_i = t \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement le théorème 3.4, donnant la loi limite de l'ensemble des variables aléatoires $\dfrac{\xi_i^{(n)}(n)}{n}$, dans le cas P_n

strictement markovien convergeant vers P .

Soit $\mathcal{Q}$ la matrice (s,s) déléments q_i^j , $i \neq j$, $q_i^i = - q_i$.

On montre que $\mathcal{Q}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu sous-markovien (resp. strictement markovienne), lorsque P_n est sous-markovien (resp. strictement markovienne).

Soit S_c le système associé à $\mathcal{Q}$. Il a donc s états possibles dans le cas strictement markovien, $s+1$ états possibles dans le cas sous-markovien.

Soit $K_1 = \{ 1 , 2 , \ldots s \}$.

Soit $T_i(t)$ la durée de séjour de S_c dans l'état i pendant un intervalle de temps $(0,t)$, Z_t l'état de S_c à l'instant t .

Soit A_t l'évènement : S_c reste en K_1 au moins jusqu'à t .

Alors la limite trouvée au corollaire 3.3 s'écrit :

$$E \left[\exp i\Big(\sum_{j=1}^{s} v_j \, T_j(t)\Big) \Big|_{A(t)} / \left\{ Z_0 = \alpha \right\} \right] \quad , \text{ avec } \quad v_j = \langle U_j , \Gamma_j^* \rangle$$

Les théorèmes suivants calculent cette expression : si V est la matrice diagonale d'éléments v_j , si V_0' est le vecteur à s lignes égales à 1, alors, dans des conditions du corollaire 3.3

$$(P_n . D_{\frac{u}{n}})^{\mu_n} V_0(i_0) \longrightarrow \exp\left((\mathcal{Q} + i V)t\right) V_0'(\alpha) \text{ , si } i_0 \in E_\alpha \text{ .}$$

On obtient en particulier ainsi la loi limite du théorème 3.4 .

Considérons dans ce dernier cas le processus $Z_n(t)$ valant i si ${}^{(n)}X_{[nt]} \in E_i$ ($[nt]$ = partie entière de nt). On montre que $Z_n(t)$ converge, au sens de Prohorof, vers le processus $Z(t)$ (théorèmes 3.7 et 3.8) .

Les échanges entre classes P- ergodiques sont donc dans ce cas asymptotiquement markoviens.

Le chapitre 4 envisage l'existence d'états transitoires pour la matrice limite P .

Considérons l'évènement $A_{j_1,\dots j_{\ell-1},\rho_1,\dots\rho_\ell,n}$, noté encore $A_{j_i,\rho_i,\ell,n}$: $^{(n)}S$, système de loi d'évolution strictement markovienne P_n , part d'un état P- ergodique et revient à l'instant n dans les états P- ergodiques, ayant passé dans les états P- transitoires des temps $j_1+1,\dots j_{\ell-1}+1$, et des temps τ_i dans les états ergodiques tels que $\tau_i - 1 \equiv \rho_i \pmod d$.

Lorsque P a plusieurs classes ergodiques, on étudie :

$$E\left[\exp i\Big(\sum_{j\in\mathcal{T}} u_j\,{}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} u_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\Big) \Big/ \left\{{}^{(n)}X_0 = i_0\right\}\right]$$

$$= \sum_{\ell, j_i, r_i} E\Big[\exp i\Big(\sum_{j\in\mathcal{T}} u_j\,{}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} u_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\Big)\Big|_{A_{j_i,\rho_i,\ell,n}} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_0 = i_0\right\}\Big]$$

Cette dernière expression peut s'écrire comme une somme sur j_i, ρ_i, ℓ d'intégrales par rapport aux fréquences des séjours successifs dans les états ergodiques. Ces intégrales contiennent des termes du type de ceux envisagés aux lemmes 3.3, 3.4 et 3.5 ; si on les remplace par une approximation déduite de ces lemmes (en supposant donc que les conditions de ces lemmes sont vérifiées pour la restriction de P_n à $E \times E$), et si de plus, $\mathcal{Q}_n$ désignant la restriction de P_n à $E \times \mathcal{T}$, $n\mathcal{Q}_n$ reste borné, on obtient, en sommant sur ℓ, j_i, ρ_i les intégrales ainsi approchées, une approximation à $o(1)$

de $E\left[\exp i\Big(\sum_{j\in\mathcal{T}} u_j\,{}^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} u_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\Big) \Big/ \left\{{}^{(n)}X_0 = i_0\right\}\right]$

Si les conditions du corollaire 3.3 sont valables pour la restriction de P_n à $E \times E$ et si de plus $n \sqcap_i \chi_{in} \longrightarrow S_i$ (χ_{in} désignant la restriction de P_n à $E_i \times \mathcal{Z}$), on montre alors que

$$E\left[\exp i\Big(\sum_{j\in\mathcal{Z}} u_j^{(n)}\xi_j(n) + \sum_{k\in E} u_k \frac{{}^{(n)}\xi_k(n)}{n}\Big)\Big/ \left\{{}^{(n)}X_0 = i_0\right\}\right] \longrightarrow$$

$$(|^t - T.Du^t)^{-1}\Big(\sum_{\alpha=1}^{s} B_\alpha V_0^\alpha \exp\left(\Lambda(u^t) + \chi + i\,V\right)V_0'(\alpha)\Big) \quad \text{si } i_0 \in \mathcal{Z}$$

$$\exp\left(\Lambda(u^t) + \chi + i\,V\right) V_0'(\alpha) \quad \text{si } i_0 \in E_\alpha$$

$\Lambda(u^t)$ décrit les passages des états ergodiques aux états transitoires.

$$(\Lambda(u^t))(\alpha,\beta) = \langle \sqcap_\alpha^*,\ S_\alpha \cdot Du^t\ (|^t - T\cdot Du^t)^{-1} B_\beta V_0^\beta$$

(Théorème 4.2).

Lorsque P a une classe ergodique et des états transitoires, on peut faire des approximations analogues en utilisant les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 .

On trouve finalement que l'ensemble des variables aléatoires ${}^{(n)}\xi_t(n)$, $\dfrac{{}^{(n)}\xi_e(n) - a_e(n)}{\sqrt{n}}$ où $t \in \mathcal{Z}$, $e \in E_1$, converge en loi l'élément aléatoire multidimensionnel de fonction caractéristique :

$$(|^t - T\,D\,u^t)^{-1} \exp(\lambda(u^t)-q)\,\Phi_1(u^1)B_1\,V_0^1\,(i_0) \qquad i_0 \in \mathcal{Z}$$

$$\exp(\lambda(u^t)-q)\,\Phi_1(u^1)V_0^1 \quad (i_0) \qquad i_0 \in E_1$$

avec $\lambda(u^t) = \langle \sqcap_1^*,\ S_1 \cdot Du_t\ (|^t - T\cdot Du_t)^{-1} B_1 V_0^1 \rangle$

Sous la seule condition $n \sqcap_1 \chi_n \longrightarrow S_1$.

(Théorème 4.1) .

Le chapitre 5 envisage d'autre cas.

Dans la première partie, supposant que P a une seule classe ergodique et des états transitoires, la condition du théorème 4.1 n'a pas lieu, et l'on a par contre la relation $n^{\alpha}(P_n - P) \longrightarrow S$, $0 < \alpha < 1$. P_n est supposé n'avoir pas d'états transitoires pour n assez grand. Les lemmes 5.1 et 5.2 calculent les dérivées partielles jusqu'au $3^{\text{ème}}$ ordre de $\lambda_0(u)$, valeur propre de $P \times Du$ qui $\longrightarrow 1$ si $u \to 0$. Ces dérivées partielles s'annulent lorsque l'une des variables u_i par rapport à laquelle on dérive correspond à un état i . P- transitoire.

L'hypothèse faite entraine, on le montre, $n^{\alpha}(\lambda_{0,n,u} - \lambda_{0,u}) \longrightarrow \ell(u)$ fonction analytique de u , uniformément sur $)u/\|u\| < \eta($, et la convergence uniforme locale des dérivées partielles correspondantes. $\lambda_{0,n,u}$ désigne la valeur propre de $P_n \times Du$ proche de $\lambda_0(u)$; le développement limité au $3^{\text{ème}}$ ordre de $(\lambda_{0,n,v})^n$ donne alors le théorème 5.1, qui affirme qu'il existe une normalisation sur tous les états donnant une loi limite Laplacienne, les lois marginales étant $N(0,1)$.

Le théorème 5.2 envisage le cas de 2 classes ergodiques acycliques p pour la matrice limite P , et pas d'états transitoires.

On étudie les hypothèses $n(1-\lambda_{1\,0,n}) \longrightarrow \infty$, $n(1-\lambda_{2\,0,n}) \longrightarrow q$.

Soit ${}^{(n)}\xi_1(n)$ la durée totale de séjour dans E_1 au cours de n épreuves; on s'aperçoit que la loi asymptotique de ${}^{(n)}\xi_1(n)$ est "équivalente" à celle obtenue dans le cas d'une suite p_n de matrices de transition à deux lignes et deux colonnes :

$$p_n = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,0,n} & 1-\lambda_{1\,0,n} \\ 1-\lambda_{2\,0,n} & \lambda_{2\,0,n} \end{pmatrix} \longrightarrow p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $(1-\lambda_{1\,0,n})\,{}^{(n)}\xi_1(n)$ converge vers la loi déjà donnée par Dobrouchine (loi 4.b) .

Je remercie Monsieur le Professeur Fortet de l'attention bienveillante avec laquelle il a dirigé mon travail, je remercie également Monsieur le Professeur Neveu de m'avoir indiqué ce domaine de recherches et des nombreux conseils qu'il m'a prodigués.

Je suis très vivement reconnaissant à Monsieur le Professeur Ehresmann d'avoir dirigé ma seconde thèse et d'avoir bien voulu présider mon jury.

CHAPITRE 1

Préliminaires.-

Soit C l'ensemnle des nombres complexes

C^r est muni de la norme $\|Z\| = \sup_i |Z_i|$, si $z = (z_1, \ldots z_r) \in C^r$.

P , matrice (r,r), définit un opérateur linéaire continu sur C^r, de norme

$$\leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{r} |p_{i,j}| \quad (= \text{ si } p_{i,j} \geqslant 0 \ , \ \forall i,j = 1, \ldots r).$$

Nous exposerons ici rapidement la théorie des opérateurs analytiques et de leur perturbation.d'après le livre de Dunford et Schwartz.

1.- Opérateur analytique -

Définition I.1.-

Soit B un espace de Banach, $\mathcal{L}(B)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de B dans B . Toutes les normes seront notées $\| \ \|$. $\mathcal{L}(B)$ est muni de la norme :

$$T \in \mathcal{L}(B) \ , \ \|T\| = \sup_{f, \|f\| \leqslant 1} \|Tf\|$$

Soit $u \longrightarrow T(u)$ une application de D , ouvert de C^r, dans $\mathcal{L}(B)$. $T(u)$ est dite analytique dans D si, pour tout i , $\frac{\partial T}{\partial u_i}$ existe dans D , au sens de la topologie de $\mathcal{L}(B)$ défini par sa norme.

2.- Spectre et résolvante d'un opérateur -

Reprenons les mêmes notations que précédemment.

Soit I l'identité de $\mathcal{L}(B)$.

Définition I.2.-

Soit $T \in \mathcal{L}(B)$ l'ensemble $\sigma(T) \subset C$, défini de la manière suivante

$z \notin \sigma(T) \iff (T - z\,I)^{-1}$ existe, s'appelle le spectre de T - $(T - z\,I)^{-1}$ pour $z \notin \sigma(T)$, s'appelle la résolvante de T en z et sera notée $\mathcal{R}(z,T)$.

On montre que $\sigma(T)$ est fermé dans C et $\mathcal{R}(z,T)$ analytique sur $\complement(\sigma(T))$.

Lorsque $B = C^r$, $z \in \sigma(T) \iff$ déterminant $(T - z\,I) = 0$.

Définition I.3.-

$\sigma \in \sigma(T)$ est un ensemble spectral s'il est à la fois ouvert et fermé pour la topologie induite sur σ par $\sigma(T)$.

Si $B = C^r$, tous les points du spectre sont des ensembles spectraux.

3.- Espace $\mathcal{F}(T)$ -

Définition I.4.-

$f \in \mathcal{F}(T) \iff$ f analytique dans un ouvert D_f contenant $\sigma(T)$ et à valeurs dans C . Soit C_1 une courbe de Jordan entourant $\sigma(T)$ et contenue dans $D(f)$. On définit l'opérateur $f(T)$ par la formule

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{C_1} f(\lambda)\mathcal{R}(\lambda,T)\,d\lambda$$

4.- Projecteur -

Soit σ un ensemble spectral, V_1 et V_2 deux voisinages ouverts disjoints de σ et $\sigma(T) - \sigma$ respectivement, f une fonction analytique valant 1 sur V_1 et 0 sur V_2 , - l'opérateur $f(T)$ correspondant s'appelle $E(\sigma)$ et est un projecteur de $\mathcal{L}(B)$, c'est-à-dire un opérateur idempotent.

De plus, $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset \Rightarrow E(\sigma_1)(B) \cap E(\sigma_2)(B) = \{0\}$.

Si $B = C^r$, $E\{\lambda_1\} \cdot E\{\lambda_2\} = 0$, $\sum_{i=1}^{r} E\{\lambda_i\} = I$, où $(\lambda_i)_{i=1}^{r}$ est le spectre de T .

On montre également les deux théorèmes suivants :

Théorème I.1.-

$$\forall\ f \in \mathcal{F}(T)\ ,\ f(T) = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \sum_{i=0}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T - \lambda I)^i}{i\,!} f^{(i)}(\lambda) E(\lambda)$$

où $\nu(\lambda) = \sup \mu \left\{ B_{\mu-1} \subset B_\mu \text{ strictement} \right\}$ - , B_μ étant l'espace vectoriel défini par $x \in B_\mu \iff (T - \lambda I)^\mu x = 0$

$\nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$ = dimension de $E(\lambda)(B)$ = ordre de la racine λ dans l'équation déterminant $\left[\lambda I - T \right] = 0$

$$x \in E(\lambda)(B) \iff (T - \lambda I)^{\nu(\lambda)}(x) = 0$$

Théorème I.2.-

Si $f(\lambda) = \lambda^n$, $T^n = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \left[\lambda I + N_\lambda \right]^n E(\lambda)$, où $N_{(\lambda)}$ est l'opérateur nilpotent $E(\lambda)\left[T - \lambda I \right] - (N_\lambda)^{\nu(\lambda)} = 0$.

Théorème I.3.-

Soient E_1 et E_2 deux projecteurs de $\mathcal{L}(B)$. La relation $\| E_1 - E_2 \| \leq \inf \left(\frac{1}{\| E_1 \|} , \frac{1}{\| E_2 \|} \right)$ entraine l'équivalence des relations suivantes :

a) dimension de $E_1(B) = s$

b) dimension de $E_2(B) = s$.

Perturbation d'opérateurs analytiques -

Théorème I.4.-

Soit $T \in \mathcal{L}(B)$. $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_T(\varepsilon)$ tel que $\| T - T_1 \| < \delta_T(\varepsilon) \Rightarrow$

a) $\sigma(T_1) \subset S(\sigma(T), \varepsilon)$ (ensemble des boules ouvertes centrées sur $\sigma(T_1)$ et de rayon ε).

b) $\lambda \notin S(\sigma(T), \varepsilon) \Rightarrow \| R(\lambda, T_1) - R(\lambda, T) \| < \varepsilon$

c) Si $f \in \tilde{F}(T)$, $D_f \supset S(\sigma(T), \varepsilon) \Rightarrow f \in \tilde{F}(T_1)$, $\|f(T) - f(T_1)\| \leq M\varepsilon$,

où, si C_1 désigne la courbe de Jourdan entourant $S(\sigma(T), \varepsilon)$,

$$M = \sup_{z \in C_1} |f(Z)| \times \frac{1}{2\pi} \times (\text{longueur de } C_1).$$

Théorème I.5.-

Soit $u \in C^r$, $T(u)$ un opérateur analytique sur C^r .

$f \in \tilde{F}(T_{(o)})$, D_f son domaine de définition ; il existe donc ε_1 tel que

$$D_f \supset S(\sigma \circ T_o) , \varepsilon_1) .$$

a) $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\exists \delta_1$ tel que $\|u\| < \delta_1 \Rightarrow \|T(u)-T(o)\| < \delta_{T(o}$

les conclusions du théorème I.4 sont alors valables pour $T = T(o)$, $T_1 = T(u)$ et ε .

b) Soit U_1 ouvert, $\bar{U}_1 \subset D_f \cap \complement(S(\sigma(To), \varepsilon))$. Il existe δ_2 tel que

$$\|u\| < \delta_2 \Rightarrow \|T(u) - T(o)\| \leq \inf_{\lambda \in U_1} \|R(\lambda, T_{(o)})\|^{-1}$$

Si $\|u\| \leq \inf(\delta_1, \delta_2)$, $f(T(u))$ est analytique en u .

Nous allons maintenant montrer un corollaire de ces théorèmes, qui nous servira directement dans notre étude.

Corollaire I.1.- Soit $B = C^r$.

Soit $T_n(u)$ une suite d'opérateurs analytiques dans C^r , équicontinus à l'origine et tendant vers l'opérateur analytique $T(u)$.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_j$ constituant $\sigma(T_{(o)})$, x_i un vecteur de C^r , tel que $\|x_i\| = 1$ et $x_i = E(\lambda i)(xi)$

Soit $y_i \in (C^r)^*$, dual de C^r , tel que $\langle y_i, x_i \rangle = 1$. y_i peut se représenter par une matrice $(1,r)$.

Soit $\varepsilon_1 = \inf_{i,j} \left(|\lambda_i - \lambda_j| , 2\|E(\lambda_i)\| , \frac{1}{\|E(\lambda_i)\|} , 2\|y_i\| \right)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$, $N(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ existent tels que $\|u\| < \eta(\varepsilon), n > N(\varepsilon) \Longrightarrow$

1) les boules ouvertes $B(\lambda_i, \varepsilon)$, de centre λ_i et de rayon ε, contiennent un ensemble spectral $\sigma_{i,n,u}$ de

$$T_{n,u} \quad \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_{i,n,u} = \sigma \subset T_{n,u})$$

2) $E_{\sigma_{i,n,u}}(C^r)$ et $E_{(\lambda_i)}(C^r)$ ont mêmes dimension et $\sigma_{i,n,u} \neq \emptyset$

3) $u \longrightarrow E_{(\sigma_{i,n,u})}$ est analytique sur $\|u\| < \eta(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon)$

4) Si dimension de $E(\lambda i)(C^r) = 1$, $\sigma_{i,n,u}$ n'a qu'un seul élément $\lambda_{i,n,u}$ et $u \longrightarrow \lambda_{i,n,u}$ est analytique.

Démonstration -

1) Soit $\varepsilon > 0 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ et soit $\delta_{T(o)}(\varepsilon)$ pris comme un théorème 1.4 appliqué à $T(o)$

$$\|T_n(u) \quad T(o)\| \leq \|T_n(u) - T_n(o)\| + \|T_n(o) - T(o)\|$$

$\|T_n(u) - T_n(o)\| < \frac{1}{2} \delta_{T(o)}(\varepsilon)$ si $\|u\| < \eta_1(\varepsilon)$, uniformément en n, par équicontinuité des T_n.

Puisque $T_n \longrightarrow T_1$, $\exists\ N_1(\varepsilon)$, tel que $\forall\ n > N_1(\varepsilon)$, $\|T_n(o) - T(o)\| < \frac{\delta_{T(o)}}{2}(\varepsilon)$. Donc $\|u\| < \eta_1(\varepsilon)$, $n > N_1(\varepsilon) \Rightarrow$

$\|T_n(o) - T(o)\| < \delta_{T(o)}(\varepsilon)$. D'après le théorème 1.4

$\sigma(T_n(u)) \subset S(\sigma(T(o)), \varepsilon) = \bigcup_{i=1,s} B(\lambda_i, \varepsilon)$. Les boules $B(\lambda_i, \varepsilon)$ sont disjointes, chacune contient un ensemble spectral de $T_{n,u}$, $\sigma_{i,n,u}$ et

$$\bigcup_{i=1}^{r} \sigma_{i,n,u} = \sigma(T_n(u)) .$$

Donc, si $\eta(\varepsilon) \leq \eta_1(\varepsilon)$, $N(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$, le 1° est démontré.

2) Soit $f_i = 1$ sur $B(\lambda_i, \varepsilon')$, 0 sur $B(\lambda_j, \varepsilon')$, $j \neq i$, où $\varepsilon < \varepsilon' < \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$. Soit $B^*(\lambda_j, \varepsilon)$ la frontière de $B(\lambda_j, \varepsilon)$. Si $\|u\| < \eta_1(\varepsilon)$ et $n > N_1(\varepsilon)$, $f_i \in \widetilde{F}(T_n(u))$ et on a $f_i(T) = E(\lambda_i)$, $f_i(T_n(u)) = E(\sigma_{i,n,u})$, en vertu des théorèmes précédents.

En fait, $$f_i(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{B^*(\lambda_j, \varepsilon)} R(\lambda, T(o))\, d\lambda ,$$

$$f_i(T_{n,u}) = \frac{1}{2\pi_i} \int_{B^*(\lambda_i, \varepsilon)} R(\lambda, T_{n,u})\, d\lambda$$

en prenant comme courbe de Jordan entourant $\sigma_i\, T_n(u) \bigcup_k B^*(\lambda_k, \varepsilon)$, circonférences disjointes, et en remarquant que $f_i(\lambda) = 0$ sur $B^*(\lambda_j, \varepsilon)$, $j \neq i$, $= 1$ si $j = i$.

Nous avons donc

$$\|E(\sigma_{i,n,u}) - E(\lambda_i)\| \leq \sup_{\lambda \in B^*(\lambda_i, \varepsilon)} \|R(\lambda, T_n(u)) - R(\lambda, T(o))\| \times \frac{1}{2\pi} \ell(B^*(\lambda_i, \varepsilon))$$

$$\leq \varepsilon^2 , \text{ en vertu des résultats du théorème 1.4.}$$

D'autre part, puisque $\varepsilon < \frac{1}{2\|E(\lambda_i)\|}$ et que $\|E(\lambda_i)\| \leq \|E(\lambda_i)\|^2$, on a $\varepsilon < \frac{1}{2} < 1$ puisque $E(\lambda_i) \neq 0$, donc $\|E_{(\sigma_{i,n,u})} - E(\lambda_i)\| < \varepsilon$.

Alors $\|E(\sigma_{i,n,u})\| \geq \|E_{(\lambda_i)}\| - \varepsilon > 0$ par hypothèse, donc $E(\sigma_{i,n,u}) \neq 0$ et $\sigma_{i,n,u} \neq \emptyset$.

D'autre part, la relation $\varepsilon < \frac{1}{2\|E(\lambda_i)\|}$ entraine, pour $\|u\| < \eta_1(\varepsilon)$

et $n > N_1(\varepsilon)$.

$$\|E(\sigma_{i,n,u}) - E(\lambda_i)\| < \varepsilon < \frac{1}{\alpha \|E(\lambda_i)\|} < \frac{1}{\|E(\lambda_i)\| + \varepsilon} \leq \inf\left[\frac{1}{\|E(\lambda_i)\|}, \frac{1}{\|E(\sigma_{i,n,u})\|}\right]$$

donc, d'après le théorème I.3, $E(\sigma_{i,n,u})$ et $E(\lambda_i)$ ont la même dimension, ce qui démontre la deuxième partie du corollaire.

3) Examinons maintenant l'analyticité de $E(\sigma_{i,n,u})$.

Soient η_2 et N_2 , analogues à η_1 et N_1 , mais relatifs à $\frac{\varepsilon}{4}$.

Alors $\sigma_{i,n,u} \subset B(\lambda_i, \frac{\varepsilon}{4})$, $\forall\ u,n, \|u\| < \eta_2, n > N_2$

$S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2})$ est telle que, pour $n > N_2$, $\|u\| < \eta_2$,

1) $\sigma_{i,n,u} \subset S(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}) \iff \sigma(T_{n,u}) \subset S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2})$ (a)

2) $S(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(\lambda_i, \frac{\varepsilon}{4}) \iff S(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4}) \subset S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2})$ (b)

3) $S(\sigma_{i,n}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(\lambda_i, \frac{3\varepsilon}{4}) \iff S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2} \subset S(\sigma(T), \frac{3\varepsilon}{4})$ (c)

Pour tout i, f_i a un domaine contenant $S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2})$, pour $n \geq N_2$. La condition (a) $\Longrightarrow f_i \in \tilde{f}(T_{n,u})$ pour $\|u\| < \eta_2$. Soit U_1 un ouvert tel que $\bar{U}_1 \subset U \cap [(S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}))$, où $U = \bigcup_j B(\lambda_j, \varepsilon')$ est le domaine de définition des f_i . Montrons que $\inf_{\lambda \in U_1} \|R(\lambda, T_n(o))\|^{-1}$ est borné inférieurement lorsque U_1 et n varient, pour $n \geq N_2$.

$\bar{U}_1 \subset U \cap S(\sigma(T_n), \frac{\varepsilon}{2}) \subset U \cap [S(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4})$, en vertu de (b), donc

$$\inf_{\lambda \in U_1} \|R(\lambda, T_n(o)\|^{-1} \geq \inf_{\lambda \in U \cap [S(\sigma(T), \frac{\varepsilon}{4})} \|R(\lambda, T_n(o))\|^{-1}$$

Or le théorème 1.4 entraine $\|R(\lambda,T_n(o)) - R(\lambda,T(o))\| < \frac{\varepsilon}{4}$, si $\lambda \in S_{(\sigma(T_o),\frac{\varepsilon}{4})}$, pour $n \geq N_2$.

Donc $\|R(\lambda,T_n(o))\| \leq \|R(\lambda,T(o))\| + \frac{\varepsilon}{4}$ et

$\inf_{\lambda \in U_1} \|R(\lambda,T_n(o\lambda)\|^{-1} \geq \inf_{\lambda \in U \cap [S(\sigma(T_o),\frac{\varepsilon}{4})} \frac{1}{\|R(\lambda,T(o)\| + \frac{\varepsilon}{4}} = \delta_\varepsilon > 0$, car

$\|R(\lambda,T(o))\|$ est borné uniformément en λ sur $\complement (S(\sigma(T_o),\frac{\varepsilon}{4})$, étant une fonction de λ continue et s'annulant à l'infini sur cet ensemble.

Or il existe $\eta_2(\varepsilon)$ tel que $\|u\| < \eta_2(\varepsilon) \Rightarrow \|T_n(u) - T_n(o)\| < \delta_\varepsilon$, en vertu de l'équicontinuité des T_n .

Si l'on prend $\eta(\varepsilon) = \inf(\eta_1(\varepsilon),\eta_2(\varepsilon),\eta_3(\varepsilon))$

$N(\varepsilon) = \sup(N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon))$

Si $\|u\| < \eta(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$, les conditions du théorème 1.5 sont remplies pour tout projecteur $E(\sigma_{i,n,u})$, ce qui montre le 3°.

4.- S_i dimension de $E(\lambda_i)(C^r) = 1$, alors $\sigma_{i,n,u}$ se réduit à un seul élément $\lambda_{i,n,u}$. $E(\lambda_{i,n,u})$ vérifie alors $T_{n,u} E(\lambda_{i,n,u}) x = \lambda_{i,n,u} E(\lambda_{i,n,u})x \quad \forall x \in C^r$. Soient alors x_i et y_i pris comme l'énoncé l'indique.

On a; au sens du produit scalaire habituel sur C^r

$$\langle y_i, T_n(u) E(\lambda_{i,n,u}) x_i \rangle = \lambda_{i,n,u} \langle y_i, E(\lambda_{i,n,u}) x_i \rangle$$

$$\lambda_{i,n,u} = \frac{\langle y_i, T_n(u) E(\lambda_{i,n,u}) x_i \rangle}{\langle y_i, E(\lambda_{i,n,u}) x_i \rangle}$$ est donc le quotient de deux

fonctions analytiques. Le dénominateur est tel que si

$$\|u\| < \eta(\varepsilon),\ n > N(\varepsilon),\quad \left| < y_i, E(\lambda_{i,n,u}) x_i > - < y_i, E(\lambda_i) x_i > \right| \leq$$

$$\|y_i\| \cdot \|E(\lambda_{i,n,u}) \cdot E(\lambda_i)\| \cdot \|x_i\| \leq \varepsilon \|y_i\| \|x_i\| = \varepsilon \|y_i\| < 1$$

par hypothèse. Comme $< y_i, E(\lambda_i)\, x_i > = 1$ par hypothèse, on a bien $< y_i, E(\lambda_{i,n,u})\, x_i > \neq 0$ si $\|u\| < \eta(\varepsilon)$, $n > N(\varepsilon)$. Donc $\lambda_{i,n,u}$ est analytique dans le domaine $\|u\| < \eta(\varepsilon)$, si $n > N(\varepsilon)$.

c.q.f.d.

CHAPITRE II

Soit un système à nombre fini d'état r , de matrice de transition P.

$\xi_i(n)$ le nombre de passage de S par i en n épreuves.

L'utilisation de la méthode des temps de retour, due à Doeblin et Feller, permet de démontrer aisément les théorèmes suivants, donnant les lois marginales limites possibles de $\xi_i(n)$, i_o étant l'état initial.

1.- i_o ergodique.

a) i transitoire ou $i \notin$ classe ergotique de $i_o \Rightarrow \xi_i(n) \equiv 0$

b) i ergodique, i et i_o appartiennent à la même classe

$$\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(o, D_i^3 \Pi_i^{*2})$$

où $N(o,a)$ désigne la loi normale de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{a}$.

$\Pi_i^* = i^{\text{ème}}$ coordonnée de la probabilité invariante relative à P

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergeance en loi

D_i variance du temps de retour à l'état i .

2.- i_o transitoire.

a) i transitoire.

$\xi_i(n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ $\qquad P[X = k] = f^*(i_o,i)(f^*(i,i))^{k-1}(1-f^*(i,i))$

$f^*(i, j)$ désigne la probabilité, partant de i , d'atteindre en un temps fini .

b) i ergodique .

$$\frac{\xi_i(n)}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \qquad \begin{matrix} X = 0 & \text{avec probabilité } 1-f^*(i_o,i) \\ = \Pi_i & f^*(i_o,i) \end{matrix}$$

c) Si de plus P n'a qu'une seule classe ergodique, alors

$f^*(i_o,i) = 1$ et

$$\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(o, D_i^3 \Pi_i^{*2})$$

Nous étudierons ici les lois limites de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_i(n)$, avec les mêmes normalisations que ci-dessus. Nous utiliserons les résultats du chapitre 1 , notamment la definition intégrale de $f(T)$ et ses conséquences.

Soit P une matrice sous markovienne (r,r) , S est un système lié à P.

$K =) 1, 2, \ldots r ($, X_k l'état de S à l'instant k .

A_n l'évènement : S reste dans K au moins jusqu'à n.

$\xi_j(n)$ le nombre de passages de S par j en n épreuves.

Avec les notationsde l'introduction, on a le

Théorème 2.1

$$E\left[\exp i \left(\sum_{k=1}^{r} U_k \xi_k(n)\right) \mid A_n \mid \{X_n = j\} / \{X_o = i_o\}\right] = (P.D_u)^{(n)}(i_o,j)$$

où $i_o, j \in K$.

Démonstration .

Désignons par $\Phi^{(n)}(i_o,j)$ le membre de gauche de l'égalité à démontrer.

On a $\Phi^{(1)}(i_o,j) = P_{i_o,j} \exp(i u_j)$

$$\Phi^{(n+1)}(i_o,j) = \sum_{k \in K} E\left[\exp\left(i\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \xi_j(n+1)\right) \mid A_{n+1} \mid \{X_1=k\} \mid \{X_{n+1}=j\} / \{X_o=i_o\}\right]\right.$$

$$= \sum_{k \in K} P_{i_o,k} \exp(iu_k) \Phi^{(n)}(k,j)$$

en vertu de la propriété de Markov et de l'homogénéité.

Donc

$$\overset{(n+1)}{\Phi}(i_o,j) = \sum_{k \in K} \overset{(1)}{\Phi}(i_o,k) \; \overset{(n)}{\Phi}(k,j) .$$

Si $\overset{k}{\Phi}$ désigne la matrice d'éléments $\overset{k}{\Phi}(i,j)$, $i,j \in K$, alors

$$\overset{(n+1)}{\Phi} = \overset{1}{\Phi} . \overset{(n)}{\Phi} \Rightarrow \overset{(n)}{\Phi} = (\overset{1}{\Phi})^{(n)} = (P.D_u)^{(n)}$$

c.q.f.d.

Corollaire 2.1

Si P est strictement markovienne, alors

$$E\left[\exp\left(i\left(\sum_{k=1}^{r} u_j \; \xi_j(n)\right)\right) / \left\{X_o = i_o\right\}\right] = (P . D_u)^{(n)} V_o .$$

Démonstration : résulte immédiatement du théorème 2.1 .

Corollaire 2.2 .

Soit S ayant une matrice de transition strictement Markovienne.

Soit $S_1, \ldots S_k$ une partition de l'espace des états de S .

Soit $\alpha, k_1, \ldots k_{\ell-1}, \beta$, une suite de nombres entiers $\geqslant 0$, $\leqslant k$, chacun d'eux étant différent du suivant et du précédent.

Soit $\lambda_1, \ldots \lambda_{\ell+1}$ une suite d'entiers $\geqslant 0$, tels que $\sum \lambda_i = n - \ell$

Soit $A_{\alpha, k_i, \beta, \lambda_i}$ l'évènement : S passe un temps λ_1 dans S_α , puis va dans S_{k_1} où il reste un temps λ_2, ... , va dans S_{k_i} où il reste λ_{i+1}, ... aboutit dans S_β où il reste un temps $\lambda_{\ell+1}$.

i_o l'état initial, j l'état final : $i_o \in S_\alpha$, $j \in S_\beta$. Alors

$$E\left[\exp i\Big(\sum_{j=1}^{r} u_j\, \xi_j(n)\Big|_{A_{\alpha,k_i,\beta,\lambda_i}}\Big|\{X_n=j\}\Big/\{X_o=i_o\}\right]$$

$$= (P_{\alpha,\alpha} \times Du_\alpha)^{\lambda_1-1} \times P_{\alpha,k_1} \times Du_{k_1} \times (P_{k_1,k_1} \times Du_{k_1})^{\lambda_2-1} (P_{k_1,k_2} \times Du_{k_2}) \times \dots$$

$$\times (P_{k_i,k_i} \times Du_{k_i})^{\lambda_{i+1}-1} P_{k_i,k_{i+1}} \times Du_{k_{i+1}} \times \dots \cdot (P_{\beta,\beta})^{\lambda_{\ell+1}-1}(i_o,j)$$

P_{k_i,k_j} désignant la restriction de P à $S_{k_i} \times S_{k_j}$, Du_{k_i} la restriction de Du à $S_{k_i} \times S_{k_i}$.

Démonstration.-

Cette identité se démontre aisément par récurrence : il suffit de vérifier que l'on a :

$$E\left[\exp\Big(\sum_{k=1}^{r} i\, u_j\, \xi_j(n)\Big)\Big|_{A_{\alpha,k_i,\beta,\lambda_i}}\Big|\{X_n=j\}\Big/\{X_o=i_o\}\right]$$

$$= \sum_{\substack{k\in S_\alpha \\ h\in S_{k_1}}} E\left[\exp\Big(\sum_i u_j\, \xi_j(\lambda=1)\Big|_{A_{\alpha,\lambda_1}}\Big|\{X_{\lambda_1-1}=k\}/\{X_o=i_o\}\right] \times$$

$$P_{\alpha,k_1}(k,h)\exp(iu_h) \times E\exp\Big(\sum i u_j\, \xi_j(n-\lambda_{1+1})\Big|_{A_{k_1,\dots\beta,\lambda_2,\dots\lambda_\ell}}$$

$$/\{X_o=h\}\Big]$$

formule qui résulte de la propriété de Markov et de l'homogénéité du processus.

Comme $E\left[\exp\Big(\sum i\, u_j\, \xi_j(\lambda_1-1)\Big|_{A_{\alpha,\lambda_1}}\Big|\{X_{\lambda_1-1}=k\}\Big/\{X_o=i_o\}\right]$

$$= (P_{\alpha,\alpha} \times Du_\alpha)^{\lambda_1}(i_o,k)$$

en vertu du théorème 2.1, la récurrence conduit bien à la formule indiquée

c.q.f.d.

Cas I.- P n'a qu'une seule classe ergodique et pas d'états transitoires.

On sait qu'alors l'équation $\Delta(s|-P) = 0$ a d racines de module 1, qui sont des racines simples de cette équation et qui sont racines de l'équation $\lambda^d - 1 = 0$. Il y a alors d classes cycliques. Les autres racines de l'équation aux valeurs propres ont un module $\leq r < 1$.

Théorème 2.2.

Dans les conditions de (I), il existe $\eta > 0$ tel que
$\|u\| < \eta$, $u = (u_1, \dots u_r) \in C^r \Longrightarrow$

1) $(P \star Du)^n = \sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_i(u))^n E(\lambda_i(u)) + A(n,u)$

$\lambda_i(u)$ sont les valeurs propres de $P \star Du$ qui tendent vers les racines de module 1 de l'équation aux valeurs propres de P.
$E(\lambda_i(u))$ sont les projecteurs correspondants

2) $\|A(n,u)\| \leq M \rho^n$, où $0 \leq \rho < 1$, uniformément en u, sur $\|u\| < \eta$

3) les applications $u \to \lambda_i(u)$ et $u \to E(\lambda_i(u))$ sont analytiques en u, $\lambda_i(0) = \lambda_i$, $\lambda_0(o) = 1$

4) Si $u_n \to 0$, alors $(P \star Du_n)^n V_0 - (\lambda_0(u_n))^n V_0 \to 0$ si $n \to \infty$

Démonstration.-

$T(u) = P \star Du$ est un opérateur analytique sur C^r. En prenant $T_n(u) = T(u)$, le corollaire 1.1 s'applique aux valeurs propres $1, \dots \lambda_{d-1}$ de $T(0) = P$, ce qui nous donne le 3°, avec le η du corollaire 1.1.

Le théorème 1.2 conduit à la formule du 1°, en prenant $A(n,u) =$

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma(P \star Du) \\ \lambda \notin \lambda_1(u), \dots \lambda_{d-1}(u), \lambda_0(u)}} (\lambda + N_\lambda)^n E(\lambda)$$ et en utilisant le fait que

pour $\|u\| < \eta$, $E(\lambda_i(u))$ et $E(\lambda_i)$ ont même dimension, ce qui entraine $v(\lambda_1(u)) = 1$, donc $N_{\lambda_i(u)} = 0$.

Soient $1, \lambda_1, \ldots \lambda_{d-1}, r_1, \ldots r_j$ les valeurs propres de P . Soit ε assez petit pour que les boules centrées sur ces valeurs propres et de rayon ε soient disjointes, et que celles de centres r_i soient contenues dans le cercle unité . On sait que pour $\|u\| < \eta$, chaque boule contient un ensemble spectral de $P_\times Du$, les projecteurs correspondant étant de même dimension.

Soient C_1' (resp. C_1'') la réunion des circonférences de centre λ_i (resp. r_i) et de rayon ε .

$C_1 = C_1' \cup C_1''$ est une courbe de Jordan entourant $\sigma(P\ Du)$, pour $\|u\| < \eta$, donc $(P_\times Du)^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \lambda^n R(\lambda, P_\times Du) d\lambda$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1'} \lambda^n R(\lambda, P_\times Du) d\lambda + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1''} \lambda^n R(\lambda, P_\times Du) d\lambda$$

un calcul simple, fondé sur l'expression de $R(\lambda, P_\times Du)$ fournie par le théorème 1.1, entraine :

$$\sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_i(u))^n E(\lambda_i(u)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1'} \lambda^n R(\lambda, P_\times Du)\, d\lambda$$

et par conséquent

$$A(n,u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1''} R(\lambda, P_\times Du)\, \lambda^n\, d\lambda$$

Le théorème 1.4 entraîne

$$\| R(\lambda, P_\times Du) - R(\lambda, P) \| < \varepsilon \text{ pour } \| u \| < \eta_1, \ \forall\, \lambda \in C_1'' .$$

Donc $\| R(\lambda, P_\times Du) \| \leq \sup_{\lambda \in C_1''} \| R(\lambda, P) \| + \varepsilon = K .$

Donc $\| A(n,u) \| \leq \frac{1}{2\pi} K \ell(C_1'') . \rho^n$ où $\rho = \sup_{\lambda \in C_1''} |\lambda|$

$= M \rho^n$

Le 2° est donc démontré. Abordons la dernière partie du théorème. Pour n assez grand, $\| u_n \| < \eta$ et les formules précédentes sont applicables.

D'autre part $E(\lambda_i(u_n)) \longrightarrow E(\lambda_i(o))$ si $n \longrightarrow \infty$

Comme $E(\lambda_i(o)) V_o = 0$ pour $i \neq 0$

$= V_o$ pour $i = 0$,

et que $A(n,u_n) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$, on a bien le résultat indiqué au 4°.

Le théorème est complètement démontré.

Dans les conditions de (I), on sait que $\frac{\xi_i(n)}{n}$ converge vers Γ_i^*

Donc $E\left[\exp \left(\sum_{j=1}^{n} iu_j \frac{\xi_j(n)}{n} \right) / \left\{ X_o = i_o \right\} \right] \longrightarrow \exp\left(\sum_{k=1}^{n} iu_k \Gamma_k^* \right) = \exp(i < U, \Gamma^* >)$

où $<\ >$ = produit scalaire sur C^r.

Théorème 2.3.

$$\Gamma_i^* = \frac{1}{i} \frac{\partial \lambda_o(u)}{\partial u_i}$$

Démonstration.

Le vecteur caractéristique des variables aléatoires $\frac{\xi_i(n)}{n}$ n'est autre que $(P_* D_{\frac{u}{n}})^n V_o$. Le théorème 2.2 implique que

$$(P_* D_{\frac{u}{n}})^n V_o - (\lambda_o(\tfrac{u}{n}))^n V_o \longrightarrow 0$$

L' analyticité de $\lambda_o(u)$ au voisinage de $u = 0$ et un développement limité au premier ordre donne le résultat.

Théorème 2.4 (Kolmogoroff - Mihoc)

Soit P vérifiant les conditions (I).

$\Pi^* = (\Pi_1^*, \ldots \Pi_j^*, \ldots \Pi_r^*)$ la probabilité invariante à P .

Alors l'ensemble des variables aléatoires $\frac{\xi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi de Laplace multidimensionnelle, d'ordre $\leq r-d$, où d est le nombre de classes cycliques de P , de fonction caractéristique $\Phi(u_1, \ldots u_r)$.

$$\Phi(u_1, \ldots u_r) = \exp \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m} \Pi_j^* \xi_j^2 + 2 \sum_{j,\ell=1}^{m} P_{j,\ell} \xi_j \xi_\ell \right)$$ où, si δ_i et $\delta_{i,j}$ désignent respectivement le mineur de $P_{j,j}-1$ dans le déterminant de P-1 et le mineur extrait du déterminant de I - P en supprimant lignes et colonnes n° i et j

$$\xi_k = \sum_{h=1}^{s} (\delta_h^k - \Pi_h) u_h \qquad P_{h,k} = - \frac{\delta_{h,k}}{\sum_{j=1}^{r} \delta_j}$$

Démonstration.

On sait que

$$E\left[\exp i\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \left(\frac{\xi_j(n) - n\Pi_j^*}{\sqrt{n}} \right) \right) / \left\{ X_o = i_o \right\}\right]$$

$$= (P \times D_{\frac{u}{\sqrt{n}}})^n V_o(i_o) \exp(-i \langle U, \Pi^* \rangle \sqrt{n})$$

L'application du théorème 2.2 entraîne, puisque $\left| \exp(-i \langle U, \Pi^* \rangle \sqrt{n} \right|$

$$E\left[\exp i\left(\sum_{j=1}^{r} u_j\left(\frac{\xi_j(n)-n\,\Pi_j^*}{\sqrt{n}}\right)\right)/\{X_o=i_o\}\right] \quad (\lambda_o(\tfrac{u}{\sqrt{n}}))^n \exp(-i\,\langle U, \Pi^*\rangle \sqrt{n})$$

$$\longrightarrow 0$$

On peut écrire, pour $\|u\| < \eta$

$$\lambda_o(u) = 1+i\sum_{k=1}^{r} u_k \Pi_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j} u_i,u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_o(u)}{\partial u_i \partial u_j}\right)_{u=o} + 0\left(\|u\|^3\right)$$

Donc, pour n assez grand, $\left\|\frac{u}{\sqrt{n}}\right\| < \eta$ et

$$\lambda_o(\tfrac{u}{\sqrt{n}}) = 1 + i\sum_{k-1}^{r} \Pi_k^* \frac{u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_o(u)}{\partial u_i\ \partial u_j}\right)_{u=o} + o(\tfrac{1}{n})$$

$$\left(\lambda_o(\tfrac{u}{\sqrt{n}})\right)^n = \exp\Big(n \log\Big(1+ \sum_{k=1}^{r} \Pi_n^* \frac{u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_o(u)}{\partial u_i\ \partial u_j}\right)_{u=o} + o(\tfrac{1}{n})\Big)\Big)$$

$$= \exp\left(n \log (1 + Z)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(Z-\frac{Z^2}{2} + 0\,(Z^3)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\, i \sum_{k=1}^{r} \frac{\Pi_k^* u_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_o(u)}{\partial u_i\ \partial u_j}\right)_{u=o} + \left(\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^* u_k\right)^2\right) + o(\tfrac{1}{n})\right)$$

Donc $\left(\lambda_o(\tfrac{u}{\sqrt{n}})\right)^n \times \exp\left[-\sum_{k=1}^{r} i\, u_k \Pi_k^* \sqrt{n}\right] \to \exp\left[\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} u_i u_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_o(u)}{\partial u_i\ \partial u_j}\right)_{u=o} + \left(\sum_{k=1}^{r} \Pi_k^*\, u_k\right)^2\right)\right]$

Pour calculer les dérivées secondes, il suffit de dériver deux fois par rapport à u_i et u_j l'équation caractéristique de $\Delta\left[\lambda I - P \times Du\right] = 0$

Par cette méthode, Mihoc trouve le vecteur caractéristique limite indiqué dans l'énoncé du théorème. On trouve bien une loi normale multidimensionnelle, car on démontre que $\log \phi(u_1, \ldots u_r)$ est < 0
D'autre part, chaque classe cyclique introduit une relation entre les variables $\xi_i(n)$.

Soient en effet $C_0, C_1, \ldots C_{d-1}$ les classes cycliques successives.

Si $i_0 \in C_0$ et si $n = r \pmod d$, alors, si $k \leq r$, $\sum_{i \in C_k} \xi_i(n) = \left[\frac{n}{d}\right] + 1$,

si $k > r$, $\sum_{i \in C_k} \xi_i(n) = \left[\frac{n}{d}\right]$ ($[\ ]$ = partie entière)

Il en résulte que la loi limite est au plus de dimension $r - d$.

II.- P a des états transitoires.

A). P a plusieurs classes ergodiques.

Soit $\mathcal{T}$ les états transitoires, $E_1, \ldots E_s$ les classes ergodiques.

T (resp R_i , B_i) la restriction de P à $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ (resp $E_i \times E_i$, $\mathcal{T} \times E_i$)

$$P = \begin{pmatrix} T & B_1, \ldots B_s \\ 0 & \begin{matrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_s \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad Du = \begin{pmatrix} Du_t & & 0 \\ & \begin{matrix} Du_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Du_s \end{matrix} & \end{pmatrix}$$

Le problème est déjà résolu si $i_0 \notin \mathcal{T}$, car alors $\xi_i(n) = o$
si $i \notin C(i_0)$, classe ergodique de i_0 et la loi limite est alors

celle de (I) pour la restriction de P à $E \times E_i$, si $i_o \in E_i$. Supposons donc $i_o \in \tau$. Il nous faut calculer $(P \times Du)^n$.

Lemme 2.1.

Soit M une matrice carrée du type

$$M = \begin{pmatrix} A & A_1 & \cdots & A_2 \\ 0 & B_1 & 0 \,..\, 0 & \\ 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 \,..\, 0 & & B_2 \end{pmatrix}$$, où A et B_i sont des sous matrices carrées de M

Alors

$$M^k = \begin{pmatrix} (A)^k & \mathcal{A}_{1,k} & \mathcal{A}_{2,k} & \cdots \mathcal{A}_{\ell,k} \\ 0 & (B_1)^k & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots (B_\ell)^k \end{pmatrix}$$, où $\mathcal{A}_{i,k} = \sum_{j=0}^{k-1} A^j A_i B_i^{k-j-1}$

Démonstration

Elle se fait aisément par récurrence :

a) M a bien la forme indiquée

b) Si M^k a la forme (1), $M^{k+1} = M\,M^k$ sera égal à

$$\begin{pmatrix} A^{k+1} & A\,\mathcal{A}_{1,k} + A_1 B_1^k & A\,\mathcal{A}_{2,k} + A_2 B_2^k & \cdots & A\,\mathcal{A}_{\ell,k} + A_\ell B_\ell^k \\ 0 & B_1^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & & B_\ell^{k+1} \end{pmatrix}$$

qui est bien de la forme indiquée, avec

$$\mathcal{A}_{i,k+1} = A\,\mathcal{A}_{i,k} + A_i B_i^k$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} A^{j+1} A_i B_i^{k-j-1} + A_i B_i^k \quad \text{, par l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A^j A_i B_i^{k-j} + A_i B_i^k = \sum_{j=0}^{k} A^j A_i B_i^{k-j}$$

c.q.f.d.

Corollaire 2.3

i S_i P vérifie les conditions (II), la restriction à τ du vecteur

$$\left((P\ Du)^{(n)}V_o\right) = (T \times Du_t)^{(n)}V_o^t + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{n-1}(T\times D_{u_t})^j(B_i\times D_{u_i})(R_i\times D_{u_i})^{n-j-1}\,V_o^i$$

où $V_o = \begin{pmatrix} V_o^{\,t} \\ V_o^{\,1} \\ V_o^{\,2} \end{pmatrix}$

Lemme 2.2.

Soit A_n une matrice (r,s), telle que $\|A_n\| = 1$. Si B_n est une matrice (r,s) et si $n\,B_n \longrightarrow 0$, pour tout vecteur x tel que $A_n^{(n)}\,x \longrightarrow L_x$, $(A_n + B_n)^{(n)}\,x \longrightarrow L_x$.

Démonstration

Il suffit de démontrer que $\|(A_n+B_n)^{(n)} - A_n^{(n)}\| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

Or cette quantité est $\leq \left|(1+B_n)^n - 1\right| = (1+o(\frac{1}{n}))^n - 1 \to 0$ si $n \to \infty$

c.q.f.d.

Corollaire 2.4.

Soit R une matrice strictement markovienne à une classe ergodique et sans états transitoires

$$(R\times D_{\frac{u}{n-\rho}})^{(n-\rho)}\,V_o \longrightarrow \exp\left[\sum_{j=1}^{r} i\,u_j\,\Gamma_j^*\right]V_o \text{ , pour tout } \rho \text{ entier}$$

fixé, lorsque $n \longrightarrow \infty$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le lemme 2.2, avec $A_n = R \times D_{\frac{u}{n-\rho}}$, $x = V_o$,

$$B_n = R\,(D\,\underline{u}_n - D\,\underline{u}_{n-\rho}) - n\,B_n = R \times n\,(D\,\underline{u}_n - D\,\underline{u}_{n-\rho})$$

et $n(\exp \frac{i\,u_i}{n} - \exp \frac{i\,u_i}{n-\rho}) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

Corollaire 2.5.

$$(T.Du_t)^j (B_i.D\,\underline{u_i}_n).(R_i.D\,\underline{u^i}_n)^{n-j-1} V_o^i \longrightarrow (T.D_{u}t)^j B_i \exp i(\sum_{e\in E_i} u_e \ulcorner_i^* \ulcorner_e) V_o^i$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 2.5.-

La fonction caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_i(n)$, $\frac{\xi_e(n)}{n}$, où $i \in \mathcal{Z}$, $e \in E$, converge, si l'état initial $i_o \in \mathcal{Z}$, vers

$$(1^t - T \,.\, D_{u}t)^{-1} (\sum_{j=1}^{\ell} B_j \exp (i \sum_{e\in E_j} u_e \ulcorner_e^*)\, V_o^j)\,(i_o)$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que dans la série

$$\sum_{j=o}^{n-1} (T \times D_{u}t)^j\, (B_i \times D\,\underline{u^i}_n)\,(R_i \times D\,\underline{u^i}_n)^{n-j-1}\, V_o^i$$, on peut passer à la limite terme à terme.

Or $\|(T.D_{u}t)^j\| \leq \|(T)^j\| < r^j$ pour j assez grand,

où $0 < r < 1$.

Comme $\|(B_i \times D\,\underline{u_i}_n).(R_i \times D\,\underline{u^i}_n)^{n-j-1} V_o^i\| \leq 1$, on a bien le droit de passer à la limite terme à terme.

B) P n'a qu'une seule classe ergodique :

P est alors de la forme $P = \begin{pmatrix} T & , & B_1 \\ 0 & , & R_1 \end{pmatrix}$

Théorème 2.6.-

Si i_o est un état transitoire, le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_i(n)$, $\frac{\xi_e(n)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,\Gamma_1^* e$, où $i \in \mathcal{T}$, $e \in E_1$, converge vers le vecteur $(1^t - T\,D_{ut})^{-1} \times B \times \Phi_1(u^1) V_o^1$.

Démonstration.

Il suffit de montrer que la série

$$\sum_{j=o}^{n-1} (T\,D_{ut})^j \left(\tilde{B} \times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right) \times \left(R \times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\right)^{n-j-1} V_o^1 \times \exp\left[-\sum_{e \in E_1} i\,u_e\,\Gamma_1^* e\,\sqrt{n}\right]$$

a une limite obtenue en passant à la limite terme à terme. Le même argument que celui utilisé au théorème 2.5 donne le résultat.

$$(P_x D_u)^n V_o(i_o) = (T_x D_{ut})^{(n)} V_o^t + \sum_{j=o}^{n-1} (T_x Du^t)^j B_1 . D_{u^1} \; (R_1 x D_{u^1})^{n-j-1} V_o^1(i_o)$$

La première partie nous a montré que

$$(R_1 x D \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{(n)} \exp(-i(\langle U_1 , \square_1^* \rangle) \sqrt{n}\; V_o^1 \longrightarrow \phi_1 (u^1)\; V_o^1 \ ,$$

Lemme 2.3.

$$(R_1 D \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{(n-\rho)} \exp(-i(\langle U_1, \square_1^* \rangle) \sqrt{n})\; V_o^1 \longrightarrow \phi_1 (u^1)\; V_o^1 \ ,$$

où ρ est entier > 0 fixé.

Démonstration.

L'expression ci-dessus est identique à

$$\left(R_1 \exp (-i (\langle U^1 , \square_1^* \rangle \frac{\sqrt{n}}{(n-\rho)}) x D \frac{u^1}{\sqrt{n}} \right)^{(n-\rho)} V_o^1$$

Posons $n_1 = n-\rho$

$$A_{n_1} = R_1 \exp \left(-i (\langle U^1 , \square_1^* \rangle \frac{\sqrt{n}}{n-\rho} \right) x D \frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}}$$

$$B_{n_1} = R_1 \exp \left(-1 (\langle U^1 , \square_1^* \rangle \frac{\sqrt{n}}{n-\rho} \right) (D \frac{u^1}{\sqrt{n}} - D \frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}})$$

$n_1 B_{n_1} \longrightarrow 0$ si $n(\exp i(\frac{u}{\sqrt{n}}) - \exp i(\frac{u}{\sqrt{n-\rho}})) \to o$

$\iff n\, i\, u\, (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-\rho}}) \to o$, $\iff \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow o$, ce qui est

vérifié. Le lemme 2.2 s'applique avec $x = V_o^1$.

D'autre part, $(A_{n_1})^{n_1} V_o^1 = (R_1 x D \frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}})^{(n-\rho)} \exp(-i(\langle U^1, \square_1^* \rangle) \sqrt{n}) =$

$$(R_1 x D \frac{u^1}{\sqrt{n-\rho}})^{(n-\rho)} \exp(-i(\langle U^1, \square_1^* \rangle) \sqrt{n-\rho}) x \exp(-i(\langle U^1, \square_1^* \rangle)$$

$$(\sqrt{n} - \sqrt{n-\rho})\; V_o^1 \ .$$

Mais $\sqrt{n} - \sqrt{n-\rho} \longrightarrow 0$, donc

$\exp (- \sum_e i\, u_e \square_e (\sqrt{n} - \sqrt{n-\rho}) \longrightarrow 1$ et

$(A_{n_1})^{n_1} V_o^1 \longrightarrow \phi_1 (u^1)\; V_o^1$, le lemme 2.2 donne le résultat.

CHAPITRE III

Posons donc maintenant le problème suivant :

Soit P_n une suite de matrices Markoviennes (r,r) , $P_n \to P$.
$^{(n)}\xi_i(n)$ le nombre de passages par l'état i aux temps $1, \ldots n$, la loi d'évolution étant P_n .
Trouver les lois limites de l'ensemble des variables aléatoires $^{(n)}\xi_i(n)$, convenablement normées, lorsque $n \to \infty$.

I.- P est sans états transitoires, et n'a qu'une classe ergodique.

Théorème 3.1.

$\exists\, \varepsilon_1, \forall \varepsilon > 0, 0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1}{2}$ $\exists\, \eta(\varepsilon)$ et $N(\varepsilon)$ tels que $\|u\| < \eta(\varepsilon), n > N(\varepsilon) \Rightarrow$

1) Les boules ouvertes centrées sur $\sigma(P)$ et de rayon ε contiennent un ensemble spectral de $Pn \times Du$; elles sont disjointes et leur réunion contient $\sigma(Pn \times Du)$.

2) Soient 1 , λ_1 , ... λ_{d-1} les valeurs propres de module 1 de P. Alors chaque boule de centre λ_g et de rayon ε ne contient qu'un point du spectre de $(P_n \times Du)$, $\lambda_{g,n,u}$, et $u \to \lambda_{g,n,u}$ est analytique.

3) Soient $E(\lambda_{g,n,u})$ les projecteurs correspondants. Ils projettent sur un espace à une dimension et sont analytiques.

4) On peut alors écrire , si $\mu_n \to \infty$

$$(P_n \times Du)^{\mu_n} = \sum_{i=0}^{d-1} (\lambda_{g,n,u})^{\mu_n} E(\lambda_{g,n,u}) + A(n,u) \quad , \quad \text{où}$$

$$\|A(n,u)\| \leq M \rho^{\mu_n} \quad , \quad 0 \leq \rho < 1 \ .$$

Démonstration.

Les trois premiers points sont une conséquence immédiate du corollaire 1.1. Il suffit de vérifier que les applications $u \longrightarrow P_n \times Du$ sont équicontinues à l'origine, ce qui est immédiat, car

$$\| P_n \cdot Du - P_n' \| \leq \| P_n \| \cdot \| Du - 1 \| \leq \| Du - I \| \quad .$$

Le quatrième point se démontre de façon analogue au théorème 2.2. On a en effet, avec les mêmes notations,

$$A(n,u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1''} R(\lambda, P_n \times Du)\, \lambda^{\mu_n}\, d\lambda \quad , \text{ et puisque}$$

$\| R(\lambda, P_n \times Du) \| \leq \| R(\lambda, P) \| + \frac{\varepsilon}{4}$, en vertu du corollaire 1.1 , lorsque $\| u \| < \eta$ et $n \geq N$, on a le résultat désiré.

Remarque 3.1.

Nous aurions obtenu les mêmes résultats en supposant seulement Pn sous-markovienne.

Théorème 3.2.

Si Pn est une suite de matrices sous markoviennes, tendant vers P vérifiant les conditions (I)

Si μ_n entier $> 0 \longrightarrow \infty$, alors

1)

a) $(P_n D \frac{u}{n})^{\mu_n d + r_1} - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_g)^{r_1} (\lambda_{g,n,\frac{u}{n}})^{\mu_n d} E(\lambda_g) \longrightarrow 0$

b) $(P_n D \frac{u}{\sqrt{n}})^{\mu_n d + r_2} - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_g)^{r_2} (\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}})^{\mu_n d} E(\lambda_g) \longrightarrow 0$

2) Soit $\lambda_{o,n}$ la valeur propre > 0 maximale de P_n

Si $\frac{\mu_n}{n} \longrightarrow w$ et $n(1 - \lambda_{o,n}) \longrightarrow s$, alors

$$(P_n\ D\ \frac{u}{n})^{\mu_n} V_o \longrightarrow \exp\left((-s + i(\langle U, \Gamma^* \rangle))w\right) V_o$$

Si, en outre, $\mu_n - nw = O(1)$, alors

$$(P_n\ D\ \frac{u}{n})^{\mu_n} \exp\left[-i(\langle U, \Gamma_n^* \rangle)\sqrt{n}\ w\right] V_o \longrightarrow \exp(-sw)\,\Phi(uw)\ V_o$$

avec $\Gamma_{n,k}^* = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\, \overline{\lambda_{o,n,v}}}{\partial\, v_k}\right)_{v=o}$.

Démonstration.

1) Montrons que lorsque $n \to \infty$ $\lambda_{g,n,\frac{u}{n}} \to \lambda_g$ et $E(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}) \to E(\lambda_g)$

(resp $\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}} \to \lambda_g$, $E(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}) \to E(\lambda_g)$.

Le corollaire 1.1 nous indique que $\forall \varepsilon > 0$ assez petit , $\exists\ N(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$ tels que

$$|\lambda_{g,n,v} - \lambda_g| < \varepsilon\ ,\ \|E(\lambda_{g,n,v}) - E(\lambda_g)\| < \varepsilon\ ,\ \forall\ v,n$$

$\|v\| < \eta(\varepsilon), n > N(\varepsilon)$.

En posant $N'_{(u)}(\varepsilon) = \sup(N(\varepsilon), \frac{\|u\|}{\eta(\varepsilon)})$ (resp $N''_{(u)}(\varepsilon) = \sup\left(N(\varepsilon), \frac{\|u\|^2}{(\eta(\varepsilon))^2}\right)$)

$\forall n > N'_u(\varepsilon)$ (resp $n > N''_u(\varepsilon)$) , on a

$$|\lambda_{g,n,\frac{u}{n}} - \lambda_g| < \varepsilon \text{ et } \|E(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}) - E(\lambda_g)\| < \varepsilon \text{ (res} |\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}} - \lambda_g| < \varepsilon\ ,$$

$\|E(\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}) - E(\lambda_g)\| < \varepsilon$) ce qui montre bien la convergence désirée

Les formules du 1° découlent alors immédiatement de cette convergence et du théorème 3.1.

2) Nous pouvons écrire, en vertu de ce même théorème :

$$(P_n\ \frac{Du}{n})^{\mu_n} V_o - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_{g,n,\frac{u}{n}})^{\mu_n} E(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}})\ V_o \longrightarrow 0$$

$$(P_n \frac{D u}{\sqrt{n}})^{\mu_n} V_o - \sum_{g=0}^{d-1} (\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}})^{\mu_n} E(\lambda_{g,n,\frac{u}{\sqrt{n}}}) V_o \longrightarrow 0$$

Puisque $|\lambda_{g,n,u}| \leq 1$ et $E(\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}) V_o \to E(\lambda_g) V_o = 0$ si $g \neq 0$

$= V_o$ si $g = 0$

Nous avons :

$$(P_n \frac{Du}{n})^{\mu_n} V_o - (\lambda_{o,n,\frac{u}{n}})^{\mu_n} V_o \longrightarrow 0$$

$$(P_n \frac{D u}{\sqrt{n}})^{\mu_n} V_o - (\lambda_{o,n,\frac{u}{\sqrt{n}}})^{\mu_n} V_o \longrightarrow 0$$

Nous sommes donc amenés à étudier le développement, au voisinage de $v = o$, de la fonction analytique $v \longrightarrow (\lambda_{o,n,v})^{\mu_n}$.

L'analyticité de $\lambda_{o,n,v}$ en v , pour $\|v\| < \eta$, et le fait que $|\lambda_{o,n,v}| \leq e^{\eta}$, entraine la convergence uniforme locale des dérivées partielles de $\lambda_{o,n,v}$ vers les dérivées correspondantes de $\lambda_{o,v}$.

η_1 et N_1 existent donc tels que les dérivées partielles d'ordre 1, 2, 3 de $\lambda_{o,n,v}$ soient bornées uniformément sur $)\|v\| < \eta_1, n > N_1($ et $\lambda_{o,n} > o$ pour $n > N$.

Introduisons la notation suivante : soit x_n une suite de fonctions d'un paramètre v , parcourant un domaine D de R^k . Nous dirons que $x_n(v) = O'(\|v\|)$ si $\frac{x_n(v)}{\|v\|}$ est borné uniformément en n et v , lorsque $v \in D$. Si une suite $v_n \in D$, alors $x_n(v_n) = O(\|v_n\|)$ si $x_n(v) = O'(\|v\|)$.

Ecrivons alors le développement limité de $\lambda_{o,n,v}$ jusqu'au 3^e ordre

$$\lambda_{o,n,v} = \lambda_{o,n} + \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i} \right)_{v=o} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_i v_j \left(\frac{\partial^2 \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i \partial v_j} \right)_{v=o}$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} v_i v_j v_k \frac{\partial^3 \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} (\theta v_1, \theta v_2, \ldots \theta v_r)$$

où $o \leq \theta \leq 1$.

$$\sum_{i,j,k} \frac{1}{3!} v_i v_j v_k \frac{\partial^3 \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} (\partial v_1, \partial v_2, \ldots \partial v_r) = o'(\|v\|^3)$$

pour $\|v\| < \eta_1, n > N$.

$\log \lambda_{o,n,v} = \log \lambda_{o,n} + \log [1+Z_{n,v}]$ où

$$Z_{n,v} = \frac{1}{\lambda_{o,n}} \left[\sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i} \right)_{v=o} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{v_i v_j}{\lambda_{o,n}} \left(\frac{\partial^2 \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i \partial v_j} \right)_{v=o} + o'(\|v\|^3) \right.$$

On voit que $Z_{n,v} = o'(\|v\|) = \frac{1}{\lambda_{o,n}} \sum_{i=1}^{r} v_i \left(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i} \right)_{v=o} + o'(\|v\|^2)$

D'où

$$\log [1+Z_{n,v}] = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2} \right)^2 + o'(Z_{n,v})^3 = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2} \right)^2 + o'(\|v\|^3)$$

Nous avons donc, pour $\|v\| < \eta_1$ et $n > N_1$

$$(\lambda_{o,n,v})^{\mu_n} = \exp \left[\mu_n \log \lambda_{o,n} + \mu_n \left[Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2} \right)^2 + o'(\|v\|^3) \right] \right]$$

Si $\|v_n\| < \eta_1$, on a $(\lambda_{o,n,v_n})^{\mu_n} = \exp \left[\mu_n \log \lambda_{o,n} + \mu_n \left[Z_{n,v_n} - \left(\frac{Z_{n,v_n}}{2} \right)^2 + o(\|v_n\|^3) \right] \right]$

Sous l'hypothèse du 2°, $\mu_n \log \lambda_{o,n} \longrightarrow - sw$.

a) si $v_n = \frac{u}{n}$ et si $n > \sup(N_1, \frac{\|u\|}{\eta_1})$, alors $\|v_n\| < \eta_1$.

$Z_{n,v_n} = o(\|v_n\|) = o(\frac{1}{n})$

Donc $\mu_n (Z_{n,v_n})^2 \longrightarrow 0$, $\mu_n \, o(\|v_n\|^3) = \mu_n \, o(\frac{1}{n^3}) \longrightarrow 0$

$$\mu_n Z_{n,w_n} = \frac{\mu_n}{n \lambda_{o,n}} \sum_{i=1}^{r} u_i \left(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i} \right)_{v=o} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \mu_n$$

$\longrightarrow i w \langle U, \Gamma^* \rangle$, si $n \to \infty$, car

$\frac{\mu_n}{n} \to w$, $\lambda_{o,n} \to 1$ et $\left(\frac{\partial \lambda_{o,n,v})}{\partial v_j} \right)_{(u=o)} \longrightarrow \left(\frac{\partial \lambda_{o,v}}{\partial v_j} \right)_{v=o} = i \Gamma_j^*$

Donc $(\lambda_{o,n,\frac{u}{n}})^{\mu_n}$ converge vers $\exp\left[\left[- s + i < U, \Pi^* > \right] w\right]$

et $(P_n \; D_{\frac{u}{n}})^{\mu_n} V_o$ converge vers $\exp\left[\left(- s + i < U, \Pi^* > \right) w\right] V_o$.

b) Si $v_n = \frac{u}{\sqrt{n}}$ et $n > \sup(N, \frac{\|u\|^2}{\eta_1^2})$, nous pouvons écrire, puisque

$\|v_n\| < \eta_1$,

$$Z_{n,\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{2}\,(Z_{n,\frac{u}{\sqrt{n}}})^2 + O\,(\frac{\|u\|}{\sqrt{n}})^3 = \frac{1}{\lambda_{o,n}\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{r} u_i \,(\frac{\partial \lambda_{o,n,u}}{\partial v_i})_{v=o}$$

$$- \frac{1}{2n}\,(\sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^2}{\lambda_{o,n}}\,(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i})^2_{v=o})^2 - \sum_{i,j} \frac{u_i u_j}{\lambda_{o,n}}\,(\frac{\partial^2 \lambda_{o,n,u}}{\partial v_i \partial v_j})_{v=o} + O\,(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

Donc

$$(\lambda_{o,n,\frac{u}{\sqrt{n}}})^{\mu_n} \exp\left[- \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\lambda_{o,n}}\,(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i})_{v=o} \sqrt{n}\, w\right] = \qquad (1)$$

$$= \exp\left[(\mu_n - nw) \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i}{\sqrt{n}}\,(\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i})_{v=o}\right] \exp\left[- \frac{1}{2}\,\frac{\mu_n}{n}\,(\sum_{i,j} S_{i,j}(n)\, u_i\, u_j) + \mu_n \log \lambda_{o,n}\right]$$

$\exp\left[\mu_n\, O(\frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}})\right.$, où $S_{i,j}(n)$ converge vers le coefficient (i,j) de la forme quadratique $-\frac{1}{2}\log \phi_P$ associée à P .

La limite de l'expression (1) est donc bien $\exp[- sw](\phi(u))^w$, puisque $\mu_n - nw$ reste borné par hypothèse et $\frac{\mu_n}{\eta^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow 0$.

On a donc bien

$$(P_n \; D_{\frac{u}{\sqrt{n}}})^{\mu_n} \exp\left[- \sum_{i=1}^{r} i < U, \frac{\Pi_n^*}{\lambda_{o,n}} > \sqrt{n}\, w\right] V_o \longrightarrow \exp(-sw)(\phi(u))^w \quad .$$

c.q.f.d.

L'interprétation probabiliste de ce théorème donnée dans l'introduction résulte immédiatement du corollaire 2.1

Théorème 3.3.

Si P_n est strictement markovienne et converge vers P, qui a une seule classe ergodique et pas d'état transitoire, l'ensemble des variables aléatoires

$$Y_{i,n} = \frac{{}^{(n)}\varphi_i(n) - n\Pi_i^*}{\sqrt{n}}$$ converge en loi vers l'élément aléatoire multidimensionnel de fonction caractéristique Φ, loi limite relative à P.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le théorème 3.2 avec $\mu_n = n$; $\lambda_{o,n} = 1$, puisque P_n est strictement markovienne, et les hypothèses du théorème sont vérifiées.

II - Cas où P a plusieurs classes ergodiques et pas d'état transitoire.

Soient $E_1, \ldots E_s$ les s classes ergodiques relatives à P

R_i la restriction de P à $E_i \times E_i$

Du^i la restriction de Du à $E_i \times E_i$

$S_{i,j}^n$ la restriction de Pn à $E_i \times E_j$

$$Pn \longrightarrow P \Leftrightarrow \begin{cases} R_i^n \longrightarrow R_i \\ \\ S_{i,j}^n \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$Pn \times Du = \begin{pmatrix} R_1^n \times Du^1 & S_{1,2}^n \times Du^2 & \ldots & S_{1,s}^n \times Du^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{i,1}^n \times Du^1, \ldots R_i^n \times Du^i & & \ldots & S_{i,s}^n \times Du^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{s,1}^n \times Du^1, \ldots & S_{s,i}^n \times Du^i & \ldots & R_s^n \times Du^s \end{pmatrix}$$

Nous adopterons pour la matrice limite P les notations de l'introduction.

Nous noterons $\lambda_{i\,g,n,u}$ les valeurs propres de $R_{i\,n} \times Du_i$ qui tendent, si $n \longrightarrow \infty$ et $u \longrightarrow 0$, vers $\lambda_{i\,g}$.

Nous allons écrire, si $i \in E_\alpha$ et $j \in E_\beta$, le développement de $(P_n \times Du)^n(i,j)$.

Au paravant, montrons deux lemmes :

Lemme 3.1.

Soit M une matrice (r,r) E_1, ... E_s une partition de (1,2,r) en s sous classes, telles que si $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, $\alpha < \beta \Rightarrow i < j$.

Soient k et d deux entiers > 0

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} , M_{1,2} , \cdots M_{1,s} \\ M_{2,1} , M_{2,2} , \cdots M_{2,s} \\ M_{s,1} , M_{s,2} , \cdots M_{s,s} \end{pmatrix} , \quad M_{i,j} \text{ étant la restriction de M à } E_i \times E_j$$

Alors, si $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, on a :

$$M^k(i,j) = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{(k_i)_{i=1}^{\ell-1}} \sum_{(r_i)_{i=1}^{i=\ell}} \sum_{\lambda_i} (M_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d+r_1} M_{\alpha,k_1} (M_{k_1,k_1})^{\lambda_2 d+r_2} M_{k_1,k_2} \times \cdots$$

$$\times M_{k_{\ell-1},\beta} (M_{\beta,\beta})^{\lambda_{\ell+1} d+r_{\ell+1}} (i,j)$$

où $(\lambda_1 + \lambda_2 + .. + \lambda_\ell + \lambda_{\ell+1})\, d + r_1 + .. + r_\ell + r_{\ell+1} + \ell = k$

λ_i entier $\geqslant 0$, r_i entier $\geqslant 0$, $0 \leqslant r_i < d$

$k_i \neq k_{i+1}$, $k_i = 1 , 2 , \ldots s$.

Démonstration

Si M a $m_{i,j}$ pour élément i,j , nous avons :

$$M^k(i,j) = \sum_{j_1,\dots j_{k-1}} m_i^{j_1} m_{j_1}^{j_2} m_{j_{k-1}}^{j}$$

A une succession d'indices $i, j_1, \dots j_{k-1}, j$, correspond, en groupant les indices successifs qui sont dans la même classe, une succession de $\ell+1$ sous classes E_α , E_{k_1} , $\dots$ $E_{k_{\ell-1}}$, E_β , le nombre d'indices successifs dans la classe E_α (resp E_{k_i} , E_β) étant μ_1 (resp μ_{i+1} , $\mu_{\ell+1}$) .

Posons $\mu_{i-1} = \lambda_i d + r_i$.

La sommation sur toutes les suites d'indices j_i qui donnent lieu aux mêmes $(\ell, k_1, \dots k_{\ell-1}, \lambda_i, r_i)$ donne bien l'élément :

$$(M_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d+r_1} M_{\alpha,k_1} (M_{k_1,k_1})^{\lambda_2 d+r_2} M_{k_1,k_2} \times \dots$$
$$\times M_{k_{\ell-1},\beta} \times (M_{\beta,\beta})^{\lambda_{\ell+1}(k) d+r_{\ell+1}(k)} (i,j) .$$

En sommant sur ℓ, k_i, r_i, λ_i, on obtient le résultat voulu.

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$[x]$ désigne la partie entière de x , $P(x)$ l'entier le plus proche de x (lorsqu'il y a ambiguité, on prendra l'entier inférieur).

Lemme 3.2.

Conservons les hypothèses du lemme 3.1 soit d entier > 0 soit Δ_{k,ℓ,r_i} l'ensemble des points $t = (t_1, \dots t_e)$ de R^ℓ , tels que

a) $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\ell} t_i \leq 1$

b) $\left[\frac{k - \ell - (r_1 + r_2 + \dots + r_\ell)}{d} \right] t_i$ entier $\geqslant 0$.

Posons $N^k_{\ell,r_i} = \frac{k - \ell - (r_1 + \dots + r_\ell)}{d}$.

Considérons dans R^ℓ les pavés , ouverts à gauche, fermés à droites centrés sur $\mathcal{X}_{k,\ell,r_i}$ et de côtés $\frac{1}{N^k_{\ell,r_i}}$

$w \in$ Pavé centré en $t \iff \forall i = 1,\dots \ell,\ P(N^k_{\ell,r_i} w_i) = N^k_{\ell,r_i} t_i$

1) les pavés sont disjoints, leur réunion K_{k,ℓ,r_i} recouvre K_ℓ r

$(w \in K \iff w_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{\ell} w_i \leqslant 1)$.

La mesure de Lebesgue de K_{k,ℓ,r_i} vaut $C^{\ell}_{N^k_{\ell,r_i}+\ell}\ \frac{1}{(N^k_{\ell,r_i})^\ell}$

$$2)\ \sum_{\lambda_i} (M_{\alpha,\alpha})^{\lambda_1 d+r_1} M^{k_1}_{\alpha} (M_{\alpha,k_1})^{\lambda_2 d+r_2} M_{k_1,k_2} \times \cdots$$

$$\times (M_{\beta,\beta})^{\lambda_{\ell+1} d+r_{\ell+1}} (i,j)$$

$$= \int_{K_{k,\ell,r_i}} \left(M_{\alpha,\alpha}\right)^{P(N^k_{\ell,r_i} w_1) d+r_1} \times N^k_{\ell,r_i} \times M^{e}_{\alpha,k_1} \left(M_{k_1,k_1}\right)^{P(N^k_{\ell,r_i} w_2) d+r_2} \times N^k_{,r_i}$$

$$\times M_{k_1,k_2} \times \cdots \times \left(M_{\beta,\beta}\right)^{P(N^k_{\ell,r_i} w_{\ell+1}) d+r_{\ell+1}}$$

$$(i,j)\ d\,w_1 \dots d\,w_\ell$$

où $w_{\ell+1} = 1 - \sum_{i=1}^{\ell} w_i$.

Démonstration.

1) les pavés sont disjoints, la définition de $P(x)$ étant sans ambiguité. Ils recouvrent K_ℓ , car à chaque $w \in K_\ell$ correspond un t de $\mathcal{X}_{k,\ell,r_i}$, donné par la formule

$$t_i = \frac{P(N^k_{\ell,r_i} w_i)}{N^k_{\ell,r_i}}$$

$\mathcal{S}_{k,\ell,r_i}$ et les ensembles de nombres $(\lambda_i)_{i=1}^{i=\ell+1}$, tels que $\sum_{i=1}^{\ell+1} \lambda_i = N^k_{\ell,r_i}$, par les formules $\lambda_i = N^k_{\ell,r_i}\, t_i \quad i = 1, 2, \ldots \ell$.

$$\lambda_{\ell+1} = N^k_{\ell,r_i}\left(1 - \sum_{i=1}^{\ell} t_i\right)$$

Il y a donc autant de pavés que d'ensembles de nombres $\{\lambda_i\}$, soit $C^{\ell}_{N^k_{\ell,r_i}+\ell}$. Comme chaque pavé a une aire égale à $\frac{1}{(N^k_{\ell,r_i})^{\ell}}$, la formule de la première partie est donc démontrée.

2) Cette correspondance biunivoque entraine la formule du 2° , la fonction sous le signe d'intégration étant constante sur chaque pavé de centre $\{t_i\}$, où elle vaut l'élément de la somme $\sum_{\lambda_i}$ correspondant à $\lambda_i = N^k_{\ell,r_i}\, t_i$, multiplié par l'inverse de la mesure du pavé, $(N^k_{\ell,r_i})^{\ell}$.

Corollaire 3.1.

Avec les notations relatives à P_n , on a , si $i_o \in E_\alpha$,

$$(P_n\ \underline{Du}_n)^{\mu_n} V_o = \sum_{\ell=o}^{\mu_n} \sum_{k_1,\ldots k_\ell} \sum_{r_i} u^{\mu_n}_{k_1,\ldots k_\ell,r_i}(n)\, V_o^{k_\ell}$$

où $u^{\mu_n}_{k_1,\ldots k_\ell,r_i}(n) = \int_{K_{\mu_n,\ell,r_i}} \left(R^n_\alpha\ \underline{Du}^{\alpha}_n\right)^{P(N^{\mu_n}_{\ell,r_i} w_1)d+r_1} N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\, S^n_{\alpha,k_1}\, \underline{Du}^{k_1}_n \times \ldots$

$$\times \left(R^n_{k_i}\ \underline{Du}^{k_i}_n\right)^{P(N^{\mu_n}_{\ell,r_i} w_{i+1})d+r_{i+1}} \times N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\, S^n_{k_i,k_{i+1}} \times \underline{Du}^{k_i}_n \times \ldots$$

$$\times \left({}^{R_n}_{k_\ell} \, \underline{Du}_n^{k_\ell} \right)^{P(N^{\mu_n}_{\ell,r_i} \, w_{\ell+1})d+r_{\ell+1}} \quad d_{w_1} \ldots d_{w_\ell} \quad .$$

$$w_1 + w_2 + \ldots w_{\ell+1} = 1 \, .$$

$$= \int_{K_{\mu_n,\ell,r_i}} f_n^{\mu_n}{}_{k_i,r_i} (w_1, \ldots w_{\ell+1}) \, dw_1 \ldots dw_\ell$$

$$= E \left[\exp i \left(\sum_{j=1}^{r} u_j \, \frac{{}^{(n)}\xi_j(\mu_n)}{n} \Big|_{A_\alpha, k_i, r_i, \mu_n} \Big| \left\{ {}^{(n)}X_{\mu_n} = j \right\} \Big/ \left\{ {}^{(n)}X_o = i_o \right\} \right] \right.$$

avec les notations de l'introduction.

Démonstration.

Le lemme 3.2, avec $M = P_n \times \underline{Du}_n$, E_i = classes P - ergodiques, $k = \mu_n$; d = p.p.c.m d_i , donne l'expression de $(Pn \times \underline{Du}_n)^{\mu_n}(i,j)$ indiquée, dont l'interprétation probabiliste resulte du corollaire 2.2.

Lemme 3.3.

Soit f_n (resp. g_n) une fonction numérique, définie sur un ensemble A_n (resp. A) de R , intégrable au sens de Lebesgue, mesurable et bornée sur cet ensemble.

Si $A_n \supset A$ et sur A $f_n - g_n \longrightarrow 0$, Si $L(A_n) \longrightarrow L(A)$, ou L désigne la mesure de Lebesgue $\int_{A_n} f_n \, dw_1 \ldots dw_\ell - \int_A g_n \, dw_1 \ldots dw_\ell \longrightarrow 0$.

Démonstration.

$$\int_{A_n} f_n(w_1, \ldots w_\ell) dw_1 \ldots dw_\ell - \int_A g_n(w_1 \ldots w_\ell) dw_1 \ldots dw_\ell = \int_A (f_n - g_n) dw_1 \ldots dw_\ell + \int_{A_n - A} f_n \, dw_1 \ldots dw_\ell$$

le premier terme $\longrightarrow 0$, en vertu du théorème de convergence bornée de Lebesgue, le second est $\leq M\, L(A \ldots A)$, et tend donc vers 0 .

Lemme 3.4.

Si P_n est une suite de matrices sous markoviennes, qui tend vers P , matrice markovienne à s classes ergodiques sans états transitoires, et si, avec les notations exposéesplus haut

a) $n\,(1-\lambda_{i\ o,n}) \longrightarrow q_i$

b) $n\,S_{n\ i,j}$ reste borné

c) $\mu_n \to \infty$, $\frac{\mu_n}{n} \longrightarrow t$, $\mu_n - [nt]$ restant bornée

Alors

$$u^{\mu_n}_{k_i r_i}(n) - \int_{K_\ell} g^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}(w_1,\ldots w_{\ell+1})\, dw_1 \ldots dw_\ell \longrightarrow 0$$

où

$$g^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i} = \sum_{g=o}^{d_\alpha-1} (\lambda_{\alpha g})^{r_1} (\lambda_{\alpha g,n,\frac{u^\alpha}{n}})^{P([\frac{nt}{d}]w_1)d.} E(\lambda_{\alpha g}) \times [\tfrac{nt}{d}]\, S_{n\ \alpha,k_1} \times \left(\frac{Du}{n}\right)^{k_1} \times \ldots .$$

$$\times \ldots \times \sum_{g=o}^{d_{k_\ell}-1} (\lambda_{k_\ell g})^{r_{\ell+1}} (\lambda_{k_\ell g,n,\frac{u^{k_\ell}}{n}})^{P([\frac{nt}{d}]w_{\ell+1})d} \times E(\lambda_{k_\ell g})$$

$$w_1 + \ldots w_{\ell+1} = 1$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{\ell+1} + \ell = \mu_n \pmod d .$$

Démonstration.

$$u^{\mu_n}_{k_i,r_i} = \int_{K_{\mu_n,\ell,r_i}} f^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}(w_1 \dots w_{\ell+1})\, d w_1 \dots d w_\ell$$ en vertu du

corollaire 3.1

$$K_{\mu_n,\ell,r_i} \supset K_\ell,\quad L(K_{\mu_n,\ell,r_i}) = \frac{1}{N^{\mu_n}_{\ell,r_i}}\, C^{\ell}_{N^{\mu_n}_{\ell,r_i}} \longrightarrow \frac{1}{\ell!} = L(K_\ell) \text{ si } n \to \infty$$

$f^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}$ est mesurable et borné, car $\|R_{in}\|$ et $\|Du^i\| \leq 1$,

$$\| N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\ S^{\ }_{n\ \alpha,k_1} \| \leq K,$$

en vertu de l'hypothèse (b) et de la forme de $N^{\mu_n}_{\ell,r_i}$

$g^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}$ est également mesurable et bornée sur K_ℓ, pour les mêmes

raisons.

D'après le lemme 3.3, il suffit de montrer que

$$f^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i} - g^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i} \longrightarrow 0 \text{ sur } K_\ell$$

$f^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}$ et $g^{\mu_n}_{n\ k_i,r_i}$ sont des produits de matrices uniformément bornées.

il suffit de montrer que chaque terme du produit f_n, diminué du

terme de g_n correspondant, tend vers 0 si $n \to \infty$, c'est à dire que

$$1)\left(R_{i\,n}\ D\,\underline{u}_n^i\right)^{P\,(N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\,w)d+r}\ -\sum_{g=o}^{d_i-1}(\lambda_{i\,g})^r\,(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w)d}\ E(\lambda_{i\,g})\longrightarrow 0$$

$$2)\left(N^{\mu_n}_{\ell,r_i}-\left[\frac{nt}{d}\right]\right)S_{n\,i,j}\longrightarrow 0$$

Or le théorème 3.2 entraine

$$\left(R_{i\,n}\ D\,\underline{u}_n^i\right)^{P(N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\,w)d+r}\ -\sum_{g=o}^{d_i-1}(\lambda_{i\,g})^r\,(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i})^{P(N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\,w)d}\ E(\lambda_{i\,g})\longrightarrow 0$$

Il suffit de vérifier que

$$\left(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n}\right)^{P(N^{\mu n}_{\ell,r_i}\,w)d}-\left(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n}\right)^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w)d}\longrightarrow 0$$

Or ceci a bien lieu, car

$$\left|\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i}\right|\longrightarrow 1,\quad \lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i}\longrightarrow\lambda_{i\,g}\quad \text{si}\quad n\to\infty,$$

la différence ci-dessus, en module, est

$$\leq\left|1-\left(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i}\right)^{\left[P\left(\left[\frac{nt}{d}\right]w\ -\ P\left(N^{\mu_n}_{\ell,r_i}\,w\right)d\right]}\right|=\left|1-\left(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i}\right)^{K_{nd}}\right|$$

où K_n reste borné en module, en vertu de l'hypothèse (c). Donc

$(\lambda_{i\,g,n,\underline{u}_n^i})^{K_n^d} - (\lambda_{i\,g})^{K_n^d} \longrightarrow 0$ mais $(\lambda_{i\,g})^d = 1$, donc on a bien 1°.

De même, $N_{\ell,r_i}^{\mu_n} - \left[\frac{nt}{d}\right]$ reste borné lorsque $n \longrightarrow \infty$, ce qui montre le 2°; puisque $S_{i,j}^n \longrightarrow 0$.

On a donc bien le résultat annoncé.

Corollaire 3.2.

Avec les hypothèses du lemme 3.4.

$$u_{k_i,r_i}^{\mu_n}(n)\, V_o^{k_\ell} - \int_{K_\ell} \Big(\sum_{g=0}^{d=1} (\lambda_{\alpha\,g})^{r_1} (\lambda_{\alpha\,g,n,\underline{u}_n^{\alpha}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w_1)d}\, E(\lambda_{\alpha\,g}) \times \left[\frac{nt}{d}\right] S_{\alpha,k_1}^n \times D\underline{u}_n^{k_1} \times \ldots \times \sum_{g=o}^{d_{k-1}} (\lambda_{k_i\,g})^{r_{i+1}} (\lambda_{k_i\,g,n,\underline{u}_n^{k_i}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w_{i+1})d}\, E(\lambda_{k_i\,g}) \times \ldots \times$$

$$\times S_{k_{\ell-1},k_\ell}^n \times D\underline{u}_n^{k_\ell} \times \exp\Big(\Big[-q_{k_\ell} + i \langle U^{k_\ell}, \lceil_{k_\ell}^* \rangle\Big)\, w_{\ell+1}\, t\Big) \times V_o^{k_\ell} \times dw_1 \ldots dw_\ell \ .$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier que $\sum_{g=o}^{d_{k_\ell}-1} (\lambda_{k_\ell\,g})^{r_{e+1}} (\lambda_{k_\ell\,g,n,\underline{u}_n^{k_\ell}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w_{\ell+1})d}\, E(\lambda_{k_\ell\,g}) V_o^{k_\ell}$

converge vers $\exp\Big[(-q_k + i \langle U^{k_\ell}, \lceil_{k_\ell}^* \rangle) w_{\ell+1}, t\Big]$

Mais ceci est une conséquence immédiate du théorème 3.2 appliqué à la suite de matrices $R^n_{k_\ell}$, et du fait que $E(\lambda_{k_\ell} g)V_o^{k_\ell} = 0$ si $g \neq 0$, $= V_o^{k_\ell}$ si $g = o$.

Lemme 3.5.

Avec les hypothèses du lemme 3.4, si $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$, en posant $k_\ell = \beta$, on a

$$(P_{\cdot,\underline{Du}})^{\mu_n}(i,j) - \sum_{\ell=o}^{\mu_n} \sum_{k_1,\dots k_{\ell-1}} \int_{K_\ell} \sum_{r_i} g_n^{\mu_n}{}_{k_i,r_i}(w_1,\dots w_\ell)dw_1\dots dw_\ell\,(i,j) \to 0$$

La dernière expression étant une série en ℓ absolument convergente.

Démonstration.

Posons $u_\ell^{\mu_n}(n) = \sum_{r_i,k_i} u^{\mu_n}_{k_i,r_i}(n)$ avec $k_\ell = \beta$ fixé, et de même $v^{\mu_n}(n) = \sum_{r_i,k_i} \int_{K_\ell} g_n^{\mu_n}{}_{k_i,r_i}(w_1,\dots w_\ell)dw_1\dots dw_\ell$. On sait que

$u_\ell^{\mu_n}(n) - v_\ell^{\mu_n}(n) \to 0$ d'après le lemme 3.4. Il suffit de montrer que les matrices $u_\ell^{\mu_n}(n)$ et $v_\ell^{\mu_n}(n)$ ont des normes majorées, pour n assez grand, par le terme général d'une série absolument convergente en .

Or, si $\varepsilon_n = \sup_{i,j} \| S^n_{i,j} \|$, nous avons par hypothèse $n\varepsilon_n \leqslant K$, pour n assez grand. Puisque $\| R_{i_n} \| \leq 1$, $\| D_{ui} \| = 1$,

$$\| U_\ell^{\mu_n}(n) \| \leq \sum_{k_i} \sum_{\lambda_i} (R_{\alpha n} \times \underline{Du}^{\alpha})^{\lambda_1} (S_{n_{\alpha,k_1}} \times \underline{Du}) \times (R_{n_{k_1}} \times \underline{Du}^{k_1})^{\lambda_2} \times \dots \times (R_{\beta n} \times Du^{\beta})^{\lambda_{\ell+1}} \|$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\ell+1} = \mu_n - \ell$

$$\leq \sum_{k_i} (\varepsilon_n)^{\ell} \, C^{\ell}_{\mu_n} = (s-1)^{\ell-1}(n\,\varepsilon_n)\, C^{\ell}_{\mu_n} \quad , \text{ où } s \text{ est le nombre de classes ergodiques de } P$$

$$\leq K^{\ell}(s-1)\, \frac{C^{\ell}_{\mu_n}}{(\mu_n)^{\ell}} \times \left(\frac{\mu_n}{n}\right)^{\ell} \leq K^{\ell}(s-1)^{\ell-1}(t+\varepsilon)^{\ell} C^{\ell}_{\mu_n} \frac{1}{\mu_n^{\ell}} \leq \frac{s}{s-1} \frac{(K_1)^{\ell}}{\ell!}$$

avec $K_1 = K(s-1)(t+\varepsilon)$, pour n assez grand. Or le dernier terme de l'inégalité est le terme général d'une série absolument convergente en ℓ .

De même,

$$\| v_{\ell}{}^{\mu_n}(n) \| \leq \sum_{r_i, k_i} \int_{K^{\ell}} \| g^{\mu_n}_{k_i, r_i}(w_1, \ldots w_{\ell}) \| \, d\, w_1 \ldots d\, w_{\ell}$$

$$\leq \sum_{r_i, k_i} \frac{K^{\ell} t^{\ell}}{\ell! d^{\ell}} \sup_{i,g} \left(\| E(\lambda_i g) \| \right)^{\ell+1}$$

où $r_1 + r_2 + \ldots + r_{\ell+1} + \ell = \mu_n \pmod{d}$.

Il y a au plus d^{ℓ} valeurs de $r_1, \ldots r_{\ell+1}$ et $(s-1)^{\ell-1}$ valeurs de $k_1, \ldots k_{\ell-1}$.

Donc :

$$\| v_{\ell}{}^{\mu_n}(n) \| \leq (s-1)^{\ell-1} \frac{K^{\ell} t^{\ell}}{\ell!} \sup_{i,g} \| E(\lambda_i g) \|^{\ell+1} \quad , \text{ terme général d'une série en } \ell \text{ absolument convergente.}$$

Corollaire 3.3.

Si les conditions (a) et (c) du lemme 3.4 sont vérifiées, et si de plus (b') $n \prod_i S^{n}_{i,j} V^{j}_{o} \to q^{j}_{i}$, alors

$$\sum_{j\in E_\beta} (P_n \star \underline{Du}_n)^{\mu_n}(i_o,j) \to \sum_{\ell=o}^{\infty} \sum_{k_i} \int_{K_\ell} \exp\left[(-q_\alpha + i\langle U^\alpha, \square_\alpha^*\rangle)w_1 t\right] q_\alpha^{k_1} \star \dots$$

$$\star \exp\left[(-q_{k_i} + i\langle U^{k_i}, \square_{k_i}^*\rangle)w_{i+1} t\right] q_{k_i}^{k_{i+1}} \star \dots \star$$

$$\star \exp\left[(-q_\beta + i\langle U^\beta, \square_\beta^*\rangle)w_{\ell+1} t\right] dw_1 \dots dw_\ell \star V_o^\alpha(i_o) .$$

Démonstration.

La condition (b') $\Rightarrow$ (b) , car $\square_i$ a tous ses éléments > 0 .

Il suffit de montrer, d'après le lemme 3.5, que

$$\int_{K_\ell} \sum_{r_i} g_{n\ k_i,r_i}^{\mu_n}(w_1 \dots w_\ell)\, V_o^\beta\, dw_1 \dots dw_\ell \to \int_{K_\ell} \exp\left[(-q_\alpha + i\langle U^\alpha, \square_\alpha^*\rangle)w_1 t\right]$$

$$\star\, q_\alpha^{k_1} \star \dots \star \exp\left[(-q_\beta + i\langle U^\beta, \square_\beta^*\rangle)w_{\ell+1} t\right] V_o^\alpha\, dw_1 \dots dw_\ell .$$

Or nous avons vu, d'après le corollaire 3.2, avec $k_\ell = \beta$, que

$$g_{n\ k_i,r_i}^{\mu_n} V_o^\beta - \Big(\sum_{g=o}^{d_\alpha - 1} (\lambda_{\alpha g})^{r_1} (\lambda_{\alpha g,n,\underline{u}_n^\alpha})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w_1)d} E(\lambda_{\alpha g}) \star \left[\frac{nt}{d}\right] S_{n\ \alpha,k_1} \star \underline{Du}_n^{k_1} \star \dots$$

$$\star \left[\frac{nt}{d}\right] S_{n\ k_{i-1},k_i} \star \underline{Du}_n^{k_i} \star \Big(\sum_{g=0}^{d_{n_i}-1} (\lambda_g)^{r_{i+1}} (\lambda_{g,n,\underline{u}_n^{k_i}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right]w_{i+1})d} E(\lambda_{k_i g}) \star \dots$$

$$\exp\left(\left[q_\beta + i\langle U^\beta, \square_\beta^*\rangle\right] w_{\ell+1}\, t\right) V_o^\beta \to 0$$

avec

$$r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_{\ell+1} + \ell = \mu_n \pmod d \quad (1)$$

r_1 , ... r_ℓ peuvent prendre de manière indépendante toutes les valeurs comprises entre 0 et d-1 , ces valeurs extrêmes étant comprises

$r_{\ell+1}$ est déterminée pour un choix de r_1 , ... r_ℓ , par la relation (1)

Donc :

$$\sum_{r_i} {}^{\mu_n}_{g_n}{}_{k_i, r_i} \; V_o^\beta - \Big(\sum_{r_1=o}^{d-1} \Big(\sum_{g=o}^{d_\alpha - 1} (\lambda_{\alpha g})^{r_1} (\lambda_{\alpha g, n, \underline{u}_n^{(\alpha)}})^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_1\right) d} E(\lambda_{\alpha g}) \times$$

$$\left[\frac{nt}{d}\right] S_{n\, \alpha, k_1} \times D\underline{u}_n^{k_1} \times \ldots \times \left[\frac{nt}{d}\right] \times S_{n\, k_{i-1}, k_i} \times D\underline{u}_n^{k_i} \times \Big(\sum_{r_{i+1}=o}^{d-1} \sum_{g=o}^{d_{k_i}-1} (\lambda_{k_i g})^{r_{i+1}}$$

$$\times (\lambda_{k_i g, n, \underline{u}_n^{k_i}})^{P\left(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{i+1}\right) d} E(\lambda_{k_i g}) \times \ldots \times$$

$$\exp\left((-q_\beta + i \left(\langle U^\beta , \Gamma_\beta^* \rangle \right)) w_{\ell+1} t \right) V_o^\beta \longrightarrow 0$$

puisque $r_{\ell+1}$ ne figure plus dans l'expression approchée de

${}^{\mu_n}_{g_i}{}_{k_i, r_i}$ donné précédemment .

Or, si $g \neq 0$, $\sum_{r=0}^{d-1} (\lambda_{i g})^r = \dfrac{1-(\lambda_{i g})^d}{1-\lambda_{i g}} = 0$

puisque d = p.p.c.m, d_i

$$g = 0 \ , \quad \sum_{r=0}^{d-1} (\lambda_i g)^r = d \quad , \quad \text{car} \quad \lambda_i o = 1 \ .$$

Donc, en fait,

$$\sum_{r_i} g_n^{\mu_n} \; V_o^{\beta} - (\lambda_{\alpha' o, n, \frac{u}{n}^{\alpha}})^{p(\left[\frac{n_t}{d}\right] w_1) d} E(\lambda_{\alpha' o}) \times d \times \left[\frac{nt}{d}\right] S_{n \atop \alpha', k_1} \times Du^{k_1} \times \ldots$$

$$\times \; d \times \left[\frac{nt}{d}\right] \times S_{n \atop k_{i-1}, k_i} \times (\lambda_{k_i \; g, n, \frac{u^{k_i}}{n}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right] w_{i+1} \; d} E(\lambda_{k_i (o)}) \times \ldots$$

$$\times \exp\left[(-q_\beta + i(< U^\beta \, , \, \square_\beta^* >)) \, w_{\ell+1} \, t\right] V_o^\beta \longrightarrow 0$$

Or, d'après le théorème 3.2, pour tout i ,

$$(\lambda_{i o, n, \frac{u^i}{n}})^{P(\left[\frac{nt}{d}\right] w) d} \longrightarrow \exp\left[(-q_i + i < U^i, \square_i^* >) \, w \, t\right] \text{ si } n \to \infty$$

$$E(\lambda_{i o}) \times \left[\frac{nt}{d}\right] d \times S_{n \atop i,} \times D \, \frac{u^{k_i}}{n} \times E(\lambda_{g o}) - t \; E(\lambda_{i o}) n \; S_{n \atop i,j} \; E(\lambda_{g (o)}) \longrightarrow 0, \quad \text{car}$$

$n \, S_{n \atop i,j}$ reste borné en norme, et $E(\lambda_{i (o)}) n \, S_{n \atop i,j} \, E(\lambda_{j o}) \longrightarrow q_i^j \, \square_{i,j}$,

où $\square_{i,j}$ est la matrice définie sur $E_i \times E_j$, dont toutes les lignes sont égales à $\square_j^*$.

On a donc :

$$\sum_{r_i} g_n^{\mu_n} \; V_o^{\beta} \longrightarrow t^{\ell} \exp((-q_\alpha + i < U \, , \, \square_\alpha^* >) w_1 t) q_{o\alpha}^{k_1}$$

$$\exp((-q_{k_1} + i < U^{k_1} \, , \, \square_{k_1}^* >) w_2 t) \; q_{k_1}^{k_2} \times \ldots \times q_{k_{\ell-1}}^{\beta}$$

$$\exp((-q_\beta + i < U^\beta, \, \square_\beta^* >) w_{\ell+1} t) \; \square_{\alpha, k_1} \; \square_{k_1, k_2} \times \ldots \times \square_{k_{\ell-1}, \beta} \; V_o^\beta \ .$$

mais $\sqcap_{i,n}\sqcap_{h,k} = \sqcap_{i,k} \Rightarrow \sqcap_{\alpha,k_1}\sqcap_{k_1,k_2} \times \ldots \times \sqcap_{k_{\ell-1},\beta} V_o^{\beta} = V_o^{\alpha}$

D'autre part, $\sum_{r_i} g_n^{\mu_n}{}_{k_i,r_i} V_o^{\beta}$ est un vecteur uniformément borné sur K_ℓ, en norme, d'après la démonstration du lemme 3.5.

Le théorème de Lebesgue nous donne alors le résultat, la fonction limite étant bien mesurable en $(w_1, \ldots w_\ell)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3.4.

Soit P_n une suite de matrices strictement markoviennes convergeant vers P, qui a plusieurs classes ergodiques et pas d'états transitoires si 1) $n(1-\lambda_{i\,o,n}) \longrightarrow q_i$

2) $n\,E(\lambda_{i\,o})\,S_{n\,i,j}\,V_o^j \longrightarrow q_i^j$, le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires $\frac{\xi_i^{(n)}(n)}{n}$ est le vecteur qui sur E_α, vaut :

$$\sum_{\ell=o}^{\infty} \sum_{k_i} \int_{K_\ell} \exp((-q_\alpha + i \langle U^\alpha, \sqcap_\alpha^* \rangle)w_1) q_\alpha^{k_1} \exp((-q_{k_1} + i \langle U^{k_1}, \sqcap_{k_1}^* \rangle)w_2)$$

$$q_{k_1}^{k_2} \times \ldots \times \exp((-q_{k_\ell} + i \langle U^{k_\ell}, \sqcap_{k_\ell}^* \rangle)w_{\ell+1})\,dw_1 \ldots dw_\ell \quad .$$

Démonstration.

Elle résulte de la formule $(P_n \times \frac{Du}{n})\,V_o(i_o)) = \sum_{\beta=1}^{l} \sum_{j\in E_\beta} (Pn \times \frac{Du}{n})^n (i_o, j)$

et de l'application du corollaire 3.3.

Etude de la loi limite

Lemme 3.6.

Sous les hypothèses du corollaire 3.3., $\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leq q_i$, l'égalité

ayant lieu si P_n est strictement markovien.

Démonstration.

Nous avons $R^i_{n\,i}\, V^i_o + \sum_{j\neq i} S_{n\,i,j}\, V^j_o \leqslant V^i_o$

En multipliant à gauche par $E(\lambda_{i\,o,n})$, nous avons, puisque

$E(\lambda_{i\,o,n}) > 0$ pour n assez grand,

$$E(\lambda_{i\,o,n})\, R^i_{n\,i}\, V^i_o + \sum_{j\neq i} E(\lambda_{i\,o,n})\, S_{n\,i,j}\, V^j_o \leqslant E(\lambda_{i\,o,n})\, V^i_o$$

Or $E(\lambda_{i\,o,n})\, R^i_{n\,i} = \lambda_{i\,o,n}\, E(\lambda_{i\,o,n})$

Donc $(1-\lambda_{i\,o,n})\, E(\lambda_{i\,o,n})\, V^i_o \geqslant \sum_{j\neq i} E(\lambda_{i\,o,n})\, S_{n\,i,j}\, V^j_o$

Le membre de gauche converge vers $q_i\, V^j_o$, celui de droite vers

limite $\sum_{j\neq i} n\, E(\lambda_{i\,o})\, S_{n\,i,j}\, V^j_o = \sum_{j\neq i} q_{i,j}\, V^i_o$, car $n\, S_{n\,i,j}$ est borné

et $E(\lambda_{i\,o,n}) \longrightarrow E(\lambda_{i\,o})$. Donc $\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leqslant q_i$.

Dans le cas strictement markovien, l'inégalité initiale devient une égalité qui se reproduit partout.

Soit $\mathcal{Q}$ la matrice (s,s) d'éléments diagonaux $-q_i$ et d'élement (i,j) q^j_i .

Soit S' le système à nombre fini d'état , ayant la loi d'évolution

sous-markovienne homogène permanente, caractérisée par l'opérateur infinitésimal $\mathcal{R}$

Soit $Z(u)$ l'état de s' à l'instant u .

$T_i(t)$ la durée de séjour de S' dans l'état i pendant l'intervalle de temps (o,t) .

$A(t)$ l'évènement : S' reste dans K' avant t où $K' = \{1,2,\ldots s\}$

Théorème 3.5.

$E\left[\exp i \left(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t) \right)_{A(t)} \Big/ \{Z_{(o)} = \alpha\}\right]$ est la fonction caractéristique limite trouvée au corollaire 3.3 , avec $v_i = \langle U_i^i , \Pi_i^* \rangle$

Démonstration .

Soit $A_{\alpha,k_1,\ldots k_\ell}(t)$ l'évènement : S' est successivement dans les états $\alpha, k_1, \ldots k_\ell$ pendant (o,t)

$$E\left[\exp i\left(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\right)_{A(t)} \Big/ \{Z_{(o)} = \alpha\}\right]$$

$$= \sum_{\ell,k_i} E\left[\exp i \left(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\right)_{A_{\alpha,k_1,\ldots k_\ell}(t)} {}_{A(t)} \Big/ \{Z_{(o)}\}\right]$$

Soient alors T'_α, $T'_{k_1}, \ldots T'_{k_\ell}$ les durées des séjours successifs de S' dans $\alpha, k_1 \ldots k_\ell$ $\quad T'_\alpha + T'_{k_1} + \ldots + T'_{k_\ell} = t$

A ces variables aléatoires correspond une densité sur $K_{\ell,t}$, telle que

$$P_r\left\{(T'_\alpha, T'_{k_1}, \ldots T'_{k_\ell}) \in A \cap A_{\alpha,k_1,\ldots k_\ell}(t) \cap A_t \Big/ \{Z_{(o)} = \alpha\}\right\}$$

$$= \int_A f_{k_1,\ldots k_\ell,t}(w_1, \ldots w_\ell)\, dw_1 \ldots dw_\ell$$

$$f_{k_1,\dots k_\ell}(w_1 \dots w_\ell) = \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2)\, q_{k_1}^{k_2} \times \dots \times \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1})$$

$$w_{\ell+1} = t - \sum_{i=1}^{\ell} w_i$$

$$(w_i)_{i=1}^{\ell} \in K_{\ell,t} \iff w_i \geqslant 0 , \quad \sum_{i=1}^{\ell} w_i \leq t .$$

D'autre part, sur $A_{\alpha,k_1,\dots k_\ell}(t)$, on a bien

$$v_1 T_1(t) + v_2 T_2(t) + v_s T_s(t) = v_\alpha T'_\alpha + v_{k_1} T'_{k_1} + v_{k_\ell} T'_{k_\ell}$$

donc

$$E\Big(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\Big|_{A_{\alpha,k_1,\dots k_\ell}(t)}\Big|_{A(t)}\Big/\{Z(o)=\alpha\}\Big)$$

$$= \int_{K_{\ell,t}} \exp i(v_\alpha w_1 + v_{k_1} w_2 + \dots + v_{k_\ell} w_\ell) \times f_{k_1,\dots k_\ell,t}(w_1,\dots w_\ell)\, dw_1 \dots dw_\ell$$

qui est bien l'expression trouvée au corollaire 3.3 .

Théorème 3.6.

$$E\Big[\exp i\Big(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\Big|_{A_t}\Big/\{Z(o)=\alpha\}\Big] = \exp(\ell + i V)t \; V'_o(\alpha)$$

où V est la matrice diagonale d'élement v_i

V'_o le vecteur de R^s de coordonnées égales à 1 .

Démonstration.

On le fait en remarquant que l'expression

$$\Big[\exp i\Big(\sum_{j=1}^{s} v_j T_j(t)\Big|_{A_t}\Big|_{\{Z_t=\beta\}}\Big/\{Z_o=\alpha\}\Big]$$

est l'élément (α, β)

d'un semi groupe de matrices (s,s) dont on montre aisément que l'opérateur infinitésimal est $\mathcal{Q} + iV$.

Corollaire 3.4.

Sous les hypothèses du théorème 3.4 , le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires $\frac{\xi_i(n)}{n}$ est égal, pour $i_o \in E$, à $\exp(\mathcal{Q} + i V)\, V'_o(\alpha)$.

Processus adjoint.

Soit ${}^{(n)}\chi_m$ la variable aléatoire valant i si ${}^{n}X_m \in E_i$

Considérons le processus stochastique $Z_n(t) = {}^{n}\chi_{[nt]}$; il est dit processus adjoint à (P_n, E_i).

Ce n'est pas en général un processus de Markov. Il n'a que des discontinuités de première espèce, aux temps $\frac{m}{n}$.

Soit $T_i(n)$ la longueur des intervalles où $Z_n(t) = i$, pendant l'intervalle de temps $(o,1)$

$$T_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{j \in E_i} \xi_j(n)$$

$$E\left[\exp i\Big[\sum_{j=1}^{s} u_j\, T_j(n) \,\Big|\, X_o = i_o\Big]\right] = E\left[\exp i \sum_{j=1}^{s} u_j \Big(\sum_{k \in E_j} \frac{\xi_k(n)}{n}\Big) \,\Big|\, X_o = i_o\right]$$

dont la limite est $(\exp(\mathcal{Q}+iV))\, V'_o(E_\alpha)$, si $i_o \in E_\alpha$, où V est la matrice diagonale d'éléments $v_i = \langle U_1^i, \Pi_i^* \rangle$, où $U_1^i = u_i\, V_o^i$, donc $\langle U_i^i , \Pi_i^* \rangle = u_i \langle V_o^i, \Pi_i \rangle = u_i$

Donc, si U est la matrice diagonale d'éléments $u_i, i = 1, \ldots s$

Corollaire 3.5.

Sous les hypothèses du théorème 3.4, l'ensemble de variables aléatoires $T_i(n)$ converge en loi vers l'ensemble des variables $T_i(1)$ introduit au théorème 3.5.

Théorème 3.7.

Sous les hypothèses du théorème 3.4 les variables aléatoires $Z_n(t_1), \ldots Z_n(t_r)$ convergent en loi, i_o étant l'état initial, vers $Z(t_1), Z(t_2), Z(t_r)$, α étant l'état initial.

Démonstration.

$$\Pr\left[\left\{Z_n(t_1) = j_1, \ldots, Z_n(t_\ell) = j_\ell\right\} / \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\right]$$

$$= \sum_{i_k \in E_{j_k}} (P_n)^{[nt_1]}(i_o, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2)$$

$$(P_n)^{[nt_\ell]-[nt_{\ell-1}]}(i_{\ell-1}, i_\ell) \ .$$

Lorsque $n \to \infty$ $\sum_{i_\ell} (P_n)^{[nt_\ell]-[nt_{\ell-1}]}(i_{\ell-1}, i_\ell) \to \exp \mathcal{R}(t_\ell - t_{\ell-1})(j_{\ell-1}, j_\ell)$

et $\Big)_{k=1,\ldots \ell-1} \Big(\sum_{i_k \in E_{j_k}} (P_n)^{[nt_1]}(i_o, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2) \times \ldots$

$$\times (P_n)^{[nt_\ell]-[nt_{\ell-1}]}$$

$$- \Big)_{k=1,\ldots \ell-1} \Big(\sum_{i_k \ E_{i_k}} (P_n)^{[nt_1]}(i_o, i_1)(P_n)^{[nt_2]-[nt_1]}(i_1, i_2) \ \ldots$$

$$\times (P_n)^{[nt_{\ell-1}]-[nt_{\ell-2}]}(i_{\ell-2}, i_{\ell-1})$$

$$\times \exp \mathcal{R}(t_\ell - t_{\ell-1})(f_{\ell-1}, j_\ell) \longrightarrow 0$$

Dans la seconde expression, nous pouvons sommer sur $i_{\ell-1}$ et passer à la limite ; en itérant le procédé, on obtient finalement

$$\Pr\left[\left\{Z_n(t_i) = j_i \ , \ i = 1,\dots \ell\right\} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\right] \to \exp(\mathcal{Q}\, t_1)(\alpha, j_1)$$

$$\exp(\mathcal{Q}(t_2-t_1))(j_1,j_2)\ \exp(\mathcal{Q}\,(t_\ell - t_{\ell-1}))(j_{\ell-1}, j_\ell) =$$

$$\Pr\left[\left\{Z(t_i) = j_i \ , \ i = 1,\dots \ell\right\} / \left\{Z(o) = \alpha\right\}\right]$$

c.q.f.d.

Soit $D(o,1)$ l'espace des fonctions numériques définies sur $[0,1]$ et n'ayant que des discontinuités de première espèce. Prohorof a montré que c'est un espace métrisable complet, ainsi que l'espace des mesures bornées sur le σ corps topologique de $D(0,1)$, muni de la topologie faible.

Le processus $Z_n(t)$ est presque surement à valeur dans $D(0,1)$, il lui correspond une mesure discrète sur $D(0,1)$, μ_{n,i_o} , i_o étant l'état initial.

Le processus $Z(t)$ est aussi, p.s , à valeur dans $D(0,1)$.

$$\Pr\left[\,|Z(t_2) - Z(t_1)| > \eta \ \big| Z(t_1) = j_1\right] = 1 - e^{-q_{j_1}(t_2-t_1)}$$

$$\leq \ 1 - e^{-(\sup_j q_j)(t_2-t_1)}$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{si } |t_2-t_1| < \delta(\varepsilon) \ , \text{ uniformément en } j \ .$$

Alors, selon Prohorof (exemple 2 du § 2.1), il existe une mesure de probabilité sur $D(0,1)$, notée μ_α si $Z(o) = E_\alpha$, telle que

a) $\mu_\alpha)\varphi \in D(0,1)$, φ continue en t_o fixé $\big(= 1$

b) Soient $t_1, \dots t_\ell$ des points sur $[0,1]$ l'application $\Pi_{t_1, \dots t_\ell}$

$\varphi \to (\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots \varphi(t_\ell)$ est continue μ_α presque surement en vertu de (a) et la répartition induite par μ_α et $\Pi_{t_1, \dots t_\ell}$ sur R^s est celle induite par les variables aléatoires $Z(t_1)$, $Z(t_2)$, $\dots$ $Z(t_s)$.

Théorème 3.8.

μ_{n,i_o} converge faiblement vers μ_α , si $i_o \in E_\alpha$.

Démonstration.

Nous démontrerons d'abord que μ_{n,i_o} est un ensemble faiblement relativement compact, puis que toute mesure μ_α^* limite d'une sous suite μ_{n_k,i_o} a la propriété(a). Cela entraine que pour toute mesure limite μ_α^* , $\mu_\alpha^* \circ(\Gamma_{t_1}, .. t_o)^{-1} = \lim_{n_k \to \infty} \mu_{i_o,n_K} \circ(\Gamma_{t_1}, .. t_\ell)^{-1}$:

$= \mu_\alpha \circ(\Gamma_{t_1}, .. t_\ell)^{-1}$ en vertu du théorème 3.7 et des propriétés de μ_α . Donc $\mu_\alpha^* = \mu_\alpha$.

Montrons donc que

1) L'ensemble $\{\mu_{n,i_o}\}$ est faiblement relativement compact.

les conditions de compacité nécessaires et suffisantes sont données par le lemme 2.4 de Prohorof.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M_ε , δ_ε et une fonction $\omega(\delta,\varepsilon) \downarrow 0$ si $\delta \downarrow 0$ tels que $\forall n$

a) μ_{n,i_o}) $\varphi: \sup_{t \in [0,1]} |\varphi| \leq M_\varepsilon$ ($> 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

b) μ_{n,i_o}) $\varphi: \tilde{\omega}_\varphi(\delta) \leq \omega(\delta,\varepsilon)$ pour tout $\delta < \delta(\varepsilon)$ ($> 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

$\tilde{\omega}_\varphi(\delta)$ désigne $\sup_{\Delta, |\Delta| \leq \delta} \sup_{z \in \Delta} \inf \{ \omega_\varphi[z_1, z], \omega_\varphi[z, z_2] \}$

où ω_φ désigne l'oscillation de φ sur (a,b)

Δ désigne un intervalle (z_1, z_2) , de longueur $|\Delta|$

Soit $D_s(0,1)$ l'ensemble des éléments de $D(0,1)$ prenant les valeurs 1, 2, .. s .

Les mesures μ_{n,i_o} sont concentrées en des points de $D_s(0,1)$.

La première condition est donc toujours remplie.

Pour les éléments de $D_s(0,1)$, $\tilde{\omega}_\varphi(\delta)$ ne peut prendre que des valeurs entières. Par conséquent, $\omega(\delta,\varepsilon)$ peut être pris égal à 0, pour $\delta < \delta(\varepsilon)$. La condition (b) s'écrit alors :

$$p_{i_o,n}\left\{\varphi \in D_s(0,1) \ , \ \tilde{\omega}_\varphi(\delta) = 0\right\} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \delta \longrightarrow 0 \ , \ \text{uniformément en} \ n \ .$$

Dire que $\tilde{\omega}_\varphi(\delta) = 0$, c'est dire que sur tout intervalle de longueur δ , φ a au plus une discontinuité. La condition de compacité s'interprète donc ainsi :

Probabilité $\left\{\right.$ pour le processus $Z_n(t)$, les temps de séjour successifs dans chaque classe ergodique sont $> \delta \left.\right\} \longrightarrow 1$ si $\delta \longrightarrow 0$, uniformément en n .

Cette probabilité s'écrit :

$$\sum_{\ell} \sum_{k_i} \sum_{r_i} \sum_{\lambda_i} \left(R_{\alpha n}\right)^{\lambda_1 d+r_1} S_{\alpha,k_1}^{n} \times \left(R_n\right)^{\lambda_2 d+r_2}_{k_1} S^{n}_{k_1,k_2} \times \cdots \times$$

$$\times \left(R_n\right)^{\lambda_{\ell+1} d+r_{\ell+1}}_{k_\ell} V_o^{k_\ell}$$

avec $\dfrac{\lambda_i d+r_i+1}{n} > \delta$.

Cette somme peut s'écrire, avec les notations des théorèmes précédents:

$$\sum_{\ell=o}^{n} \sum_{k_i} \sum_{r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^{n}_{n\ k_i,r_i}(w_1,..w_\ell)\, V_o^{k_\ell}\, dw_1 \,..\, dw_\ell \ , \ \text{avec} \ u = 0 \ .$$

où $R_{n,\delta}$ est une certaine région de R^{ℓ} , déterminée par

$$P(N^{n}_{\ell,r_i} w_i) d + r_i + 1 > n\,\delta$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} w_i \geqslant \left[\dfrac{n\delta - 1 - r_i}{d\, N^n_{\ell, r_i}} \right] + \dfrac{1}{2N^n_{\ell, r_i}} \quad , \forall_i \\ \sum_{i=1}^{\ell+1} w_i = 1 \end{cases}$$

soit $v_{i,n}(\delta) = \left[\dfrac{n\delta - 1 - r_i}{d\, N^n_{\ell, r_i}} \right] + \dfrac{1}{2N^n_{\ell, r_1}}$

$v_{i,n}(\delta) \longrightarrow \delta$ si $n \longrightarrow \infty$

soit R_δ la région limite de $R_{n,\delta}$: $w \in R_\delta \Longleftrightarrow \begin{cases} w_i \geqslant \delta \\ \sum_{i=1}^{\ell+1} w_i = 1 \end{cases}$

$a_{\ell,n,\delta} = \sum_{k_i, r_1} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{n\, k_i, r_i} (w_1, \ldots w_\ell)\, dw_1 \ldots dw_\ell\, V_o^{k_\ell}$ est le terme général

d'une série en ℓ, il est majoré par le terme d'une série uniformément convergente en ℓ, ce terme étant indépendant de n.

Pour montrer la propriété, il suffira de montrer que $a_{\ell,n,\delta}$ converge vers $a_{\ell,\delta}$ uniformément en δ lorsque $n \longrightarrow \infty$ - $\sum_{\ell=o}^{n} a_{\ell, ,\delta}$ convergera alors uniformément en δ vers $\sum_{\ell=o} a_{\ell,\delta}$ -. Il suffira ensuite de montrer que $\sum_{o}^{\infty} a_{\ell,\delta} \longrightarrow 1$ si $\delta \longrightarrow 0$

a) montrons que $a_{\ell,n,\delta} \rightarrow a_{\ell,\delta} = \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1) q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2) q_{k_1}^{k_2}$

$\times \ldots \times \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1}) d w_1 \ldots dw_\ell$

Nous avons en effet, avec les notations des théorèmes précédents, où fait $u = 0$

$$\sum_{k_i,r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} - \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1)\, q_{\alpha\alpha}^{k_1} \times \dots \times \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1}) dw_1 \dots dw_\ell$$

$$= \sum_{k_i,r_i} \int_{R_{n,\delta}} f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} - \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} + \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell}$$

$$- \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} g^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} + \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} g^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell}$$

$$- \sum_{k_i} \int_{R_\delta} \exp(-q_\alpha w_1) q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_2) \times q_{k_1}^{k_2} \times \dots \times \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1}) dw_1 \dots dw_\ell$$

On sait que $R_\delta \subset K_\ell$ $(w \in K_\ell \iff w_i \geq 0\,,\ \sum_{i=1}^{\ell+1} w_i = 1)$ sur $K\ell$,

$f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} - g^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} \longrightarrow 0$ et est mesurable bornée, donc

$$\left| \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} f^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} - \int_{R_\delta} g^n_{n\,k_i,r_i} \, V_o^{k_\ell} \right| \leq \sum_{k_i,r_i} \int_{K_e} \left| f^n_{n\,k_i,r_i} - g^n_{n\,k_i,r_i} \right| V_o^{k_\ell}$$

$\longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$, en vertu du théorème de Lebesgue , et ce uniformement en δ .

De même en vertu des résultats précédents .

$$\sum_{k_i,r_i} g_n^{k_i,r_i} V_o^{k_\ell} - \exp(-q_\alpha w_1)\, q_\alpha^{k_1} \dots \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1}) \longrightarrow 0 \text{ sur } K_\ell \text{ et}$$

g est bornée uniformément. Le théorème de Lebesgue entraine à nouveau

que $\sum_{k_i,r_i} g_n^{k_i,r_i} \int_{R_\delta} V_o^{k_\ell} - a_\ell(\delta) \longrightarrow 0$ uniformément en δ .

Reste à démontrer que $\sum_{k_i,r_i} \int_{R_{n,\delta}} f_n^{k_i,r_i} V_o^{k_\ell} - \sum_{k_i,r_i} \int_{R_\delta} f_n^{k_i,r_i} V_o^{k_\ell} \longrightarrow 0$

uniformément en δ . Puisque f est majorée sur $R_{n,\delta}$ et R_δ tous deux contenus dans K_ℓ , il suffit de montrer que $L(R_{n,\delta} \triangle R_\delta) \longrightarrow 0$

Si $n \to \infty$ $(A \triangle B = A \cap \complement B + B \cap \complement A)$, uniformément en δ . L désigne la mesure de Lebesgue sur R^ℓ .

Nous savons que $w \in R_{n,\delta} \Longleftrightarrow w_i > \dfrac{\left[n\delta - 1 - r_i\right]}{d\, N^n_{\ell,r_i}} + \dfrac{1}{2N^n_{\ell,r_i}} = v_{i,n,\delta}$

$$\left| v_{i,n,\delta} - \delta \right| = \left| \frac{\left[n\delta - 1 - r_i\right]}{d\left[\frac{n-\rho}{d}\right]} + \frac{1}{2\left[\frac{n-\rho}{d}\right]} - \delta \right| \leq \frac{K_1}{N^n_{\ell,r_i}} \quad \text{pour } \delta < \delta_1$$

$$= \varepsilon_n , \longrightarrow 0 \text{ uniformément en } \delta$$

pour $\delta < \delta_1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$w \in R_{n,\delta} \triangle R_\delta \subset \left\{ w : w \in K_\ell , \exists\, i \ (i = 1, \dots \ell+1) , \delta - \varepsilon_n < w_i < \delta + \varepsilon_n \right\}$$

On a par conséquent :

$$L(R_{n,\delta}\triangle R_\delta) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\int_{\substack{\sum_{i=1}^{\ell} w_i \leq 1 \\ w : w_i \geq 0 \\ \delta-\varepsilon_n < w_j < \delta+\varepsilon_n}} dw_1 \ldots dw \quad + \left| \int_{\substack{\sum_{i=1}^{\ell} w_i \leq 1 \\ w : w_i \geqslant 0 \\ \delta-\varepsilon_n < w_{\ell+1} < \delta+\varepsilon_n}} dw_1 \ldots dw \right| \right)$$

La dernière intégrale est égale aux précédentes, par le changement de variables

$$w_i = W_i \quad i = 1, \ldots \ell - 1$$

$$w_\ell = 1 - (W_1 + W_2 + \ldots + W_\ell)$$

au signe près, et chaque integrale, on le voit aisément $\leq 2\,\frac{\varepsilon_n}{(\ell-1)!}$

donc

$$L(R_{n,\delta}\triangle R_\delta) \leq \frac{2\varepsilon_n(\ell-1)}{(\ell-1)!} \longrightarrow 0 \text{ uniformément en } \delta < \delta_1, \text{ sin} \longrightarrow \infty$$

b) Examinons maintenant $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\delta,\ell}$, qui s'interprête évidemment comme la probabilité, pour le processus $Z(t)$, d'avoir des durées de séjour successives dans les classes ergodiques $E_1, \ldots E_s > 0$.

C'est une série uniformément convergente en ℓ, et par conséquent, si $\delta \longrightarrow 0$

$$\sum_{\ell=0} a_{\delta,\ell} \longrightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{0,\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k_i} \int_{\substack{w_i \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{\ell} w_i \leq 1}} \exp(-q_\alpha w_1) q_\alpha^{k_1} \exp(-q_{k_1} w_e) q_{k_1}^{k_i} \ldots$$

$$\star \exp(-q_{k_\ell} w_{\ell+1}) dw_1 \ldots dw_\ell \quad .$$

Mais ceci n'est autre que $\sum_{k_\varphi} \Pr\left[\left\{ Z(t) = k_\varphi \right\} \Big/ \left\{ Z(o) = \alpha \right\}\right] \equiv 1$

Les mesures $\mu_{i_o,n}$ sont donc bien relativement compactes.

2) Soit μ^* une mesure limite d'une sous suite μ_{i_o,n_k}. Montrons que μ^* a la propriété a .

Soit B l'évènement $\omega_\varphi (\tau-\delta,\tau+\delta) > \lambda$, ou, puisqu'il s'agit de fonctions de $D_s(0,1)$, sur l'intervalle $(\tau-\delta,\tau+\delta)$, φ a au moins un saut.

Nous avons :

$$\mu^*(B) < \lim_{k \to \infty} \mu_{n_k,i_o}(B)$$

Mais $\mu_{n_k,i_o}(B) = 1-\Pr\left\{\text{sur } \tau-\delta, \tau+\delta \text{ , le processus } Z_{n_k,i_o}(t) \text{ reste de la même classe ergodique.}\right\}$

$$= 1 - \sum_i \sum_{j \in E_i} (P_{n_k})^{\left[n_k(t-\delta)\right]}(i_o,j)(R_{i n_k})^{\left[n_k(t+\delta)\right]-\left[n_k(t-\delta)\right]} V_o^i(j)$$

mais, si $k \to \infty$

$$(R_{i n_k})^{\left[n_k(t-\delta)\right]} V_o^i \to \exp(-2\delta q_i) V_o^i$$

$$(P_{n_k})^{\left[n_k(t-\delta)\right]} V_o^i \to \exp \chi(t-\delta)(\alpha,i)$$

Il vient alors

$$\mu^*(B) \leq 1 - \sum_{i=1}^{s} \exp \chi(t-\delta),(\alpha,i) \exp(-2 q_i \delta) ,$$

expression qui tend vers 0 si $\delta \to 0$. Donc $\mu^*(B) \to 0$ si $\delta \to 0$, ce qui équivaut à la propriété (a).

- CHAPITRE IV -

Dans ce chapitre, nous envisagerons l'existence d'états transitoires pour la matrice limite P .

Avec les notations de l'introduction, P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} T & B_1, \ldots\ldots B_s \\ 0 & R_1 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots\ldots R_s \end{pmatrix} \qquad \text{Soit } E = \bigcup_{i=1}^{s} E_i$$

Soient

R_{i}^{n} la restriction de	P_n à $E_i \times E_i$
$S_{i,j}^{n}$	P_n à $E_i \times E_j$
$\wp_{i}^{n}$	P_n à $E_i \times \mathcal{T}$
$B_{i,n}$	P_n à $\mathcal{T} \times E_i$
T_n	P_n à $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$
$\wp_n$	P_n à $E \times E$
R_n	P_n à $E \times E$
D_{uc}	Du à $E \times E$
B_n	P_n à $E \times E$

Le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$\xi_t(n)$, $\dfrac{\xi_e(n)}{n}$, $t \in \mathcal{T}$, $e \in E$, est le vecteur

$$\begin{pmatrix} T_n \times Du^t, \; B_n \times D_{\frac{uc}{n}} \\ \wp_n \times Du^t, \; R_n \times D_{\frac{uc}{n}} \end{pmatrix}^{(n)} V_o$$

Le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$\xi_t(n), \left(\xi_e(n) - n \dfrac{\Pi^*_{1\,n,e}}{\lambda_{1\,o,n}} \right) \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est, dans le cas où P n'a qu'une

seule classe ergodique E_1 .

$$\left(\begin{matrix} T_n^{\times D_u t} & , & B_{1,n}^{\times D \frac{u^1}{\sqrt{n}}} \\ \varphi_{1\,n}^{\times D_u t} & , & R_{1\,n}^{\times D \frac{u^1}{\sqrt{n}}} \end{matrix} \right)^{(n)} V_o \quad \exp\left(-i\left(\langle U^1, \frac{\Pi^*_{1\,n}}{\lambda_{1\,o,n}} \rangle\right) \sqrt{n}\right)$$

$\lambda_{1\,o,n}$ est la valeur propre de $R_{1\,n}$ maximale qui $\to 1$ si $n \to \infty$,

$\Pi^*_{1\,n}$ le vecteur propre correspondant.

Introduisons les quantités suivantes :

$$1u^k_{j_1 \ldots j_\ell}(n) = \sum_{vi} (T_n^{\times D_u t})^{j_1} (B_n^{\times D \frac{ue}{n}})(R_n^{D \frac{ue}{n}})^{V_1} \varphi_n^{D_u t} (T_n^{Du_t})^{j_2} B_n^{D \frac{ue}{n}} \times$$

$$(R_n^{\times D \frac{ue}{n}})^{V_2} \ldots (T_n^{\times D_u t})^{j_\ell} (B_n^{\times D \frac{ue}{n}})(R_n^{D \frac{ue}{n}})^{V_\ell}$$

et de même

$$1u'^k_{j,\ldots j_\ell}(n) = \sum_{v_i} (T_n^{\times D_u t})^{j_1} (B_{1\,n}^{\times D \frac{u^1}{\sqrt{n}}}) (R_{1\,n}^{D \frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_1} \varphi_{1\,n}^{\times D_u t} \ldots$$

$$(T_n^{\times D_u t})^{j_\ell} (B_{1\,n}^{\times D \frac{u^1}{\sqrt{n}}}) (R_{1\,n}^{Du^1 \sqrt{n}})^{V_\ell} \exp\left(- \sum_{e \in E_1} i\, u_e \frac{\Pi^*_{1\,e,n}}{\lambda_{1\,o,n}} \sqrt{n}\right)$$

avec $j_1 + j_2 + \ldots + j_\ell + V_1 + V_2 + \ldots + V_\ell + 2\ell - 1 = k$

$$2^{u}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}(n)=\sum_{V_i}(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_1}(\mathcal{X}_n\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_1}(B_n\times D_{\frac{ue}{n}})(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_2}\times\ldots\times$$

$$\times(T_n\times D_u t)^{j_{\ell-1}}(B_n\times D_{\frac{ue}{n}})(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_\ell}$$

et de même

$$2^{u'}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}(n)=\sum_{V_i}(R_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_1}(\mathcal{X}_{1n}\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_1}(B_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})(R_n\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_2}\times\ldots$$

$$\times(T_n\times D_u t)^{j_{\ell-1}}(B_n\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})(R_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_\ell}\exp(-\sum_{e\in E_1} i\,u_e\,\frac{\Gamma_1^{*}{}_{e,n}}{\lambda_{1\,o,n}}\sqrt{n})$$

avec $j_1+j_2+\ldots+j_{\ell-1}+V_1+V_2+\ldots+V_\ell+2(\ell-1)=k$

$$1^{v}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_\ell}(n)=\sum_{V_i}(T_n\times D_u t)^{j_1}(B_n\times D_{\frac{ue}{n}})(R_n\times L_{\frac{ue}{n}})^{V_1}(\mathcal{X}_n\times L_u t)\times\ldots\times(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_{\ell-1}}$$

$$\times(\mathcal{X}_n\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_\ell}$$

et de même

$$1^{v'}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_\ell}(n)=\sum_{V_i}(T_n\times D_u t)^{j_1}(B_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})(R_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_1}(\mathcal{X}_{1n}\times D_u t)\times\ldots\times(R_n\times D_{\frac{u^1}{n}})^{V_{\ell-1}}$$

$$\times(\mathcal{X}_{1n}\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j}\ (\exp(-\sum_{e\in E_1} i\,u_e\,\frac{\Gamma_1^{*}{}_{e,n}}{\lambda_{1\,o,n}}\sqrt{n}))$$

avec

$$j_1+j_2+\ldots+j_\ell+V_1+\ldots+V_{\ell-1}+2(\ell-1)=k$$

$$2^{v}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}(n)=\sum_{V_i}(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_1}(\mathcal{X}_n\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_1}(B_n\times D_{\frac{ue}{n}})\times\ldots\times(T_n\times D_u t)^{j_{\ell-2}}$$

$$\times(B_n\times D_{\frac{ue}{n}})(R_n\times D_{\frac{ue}{n}})^{V_{\ell-1}}(\mathcal{X}_n\times L_u t)(T_n\times D_u t)^{j_{\ell-1}}$$

et de même

$$2^{v'}{}^{(k)}_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}(n)=\sum_{V_i}(R_{1n}\times D_{\frac{u^1}{n}})^{V_1}(\mathcal{X}_{1n}\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_1}\times\ldots\times(R_{1n}\times D_{\frac{u^1}{\sqrt{n}}})^{V_{\ell-1}}$$

$$\times(\mathcal{X}_{1n}\times D_u t)(T_n\times D_u t)^{j_{\ell-1}}\exp(-\sum_{e\in E_1} i\,u_e\,\frac{\Gamma_1^{*}{}_{e,n}}{\lambda_{1\,o,n}}\sqrt{n})$$

avec $j_1 + j_2 + \cdots + j_{\ell-1} + V_1 + V_2 + \cdots + V_{\ell-1} + 2\ell - 3 = k$

Lemme 4.1.

1) $(P_n \times D_{\frac{ue}{n}})^n V_o$ est le vecteur qui,

sur τ, vaut $\sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^1u^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^e + \sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^1v^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^t$

sur E $\sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^2u^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^e + \sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^2v^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^t$

2) $(P_n \times D_{\frac{u}{\sqrt{n}}})^n V_o \exp(-\sum_{e \in E_1} i\, u_e \frac{\lceil {}^*_{1\,e,n}}{\lambda_{1\,o,n}} \sqrt{n})$ est le vecteur qui vaut

sur τ : $\sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^1u'^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^e + \sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^1v'^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^t$

sur E : $\sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^2u'^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell} V_o^e + \sum_{\ell} \sum_{j_i} {}^2v'^{(n)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) V_o^t$

D'autre part, les relations suivantes ont lieu

$$ {}^1u^{(k)}_{j_1,\cdots j_e}(n) = (T_n \times D_u t)^{j_1} (B_n D_{\frac{ue}{n}})\ {}^2u^{(k-j_1-1)}_{j_2,\cdots j_\ell}(n) \qquad (1.1) $$

$$ {}^1u'^{(k)}_{j_1,j_2,\cdots j_\ell}(n) = (T_n \times D_u t)^{j_1} (B_{1^n} \times D \frac{u^1}{\sqrt{n}})\ {}^2u'^{(k-j_1-1)}_{j_2,\cdots j_\ell}(n) \qquad (1.1') $$

$$ {}^1v^{(k)}_{j_1,\cdots j_\ell}(n) = {}^1u^{(k-j_\ell-1)}_{j_1,\cdots j_{\ell-1}}(n)\ (\mathcal{R}_n \times D_u t) \times (T_n \times D_u t)^{j_\ell} \qquad (1.2.) $$

$$ {}_1v'^{(k)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) = {}_1u'^{(k-j_\ell-1)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) \cdot ({}_1\mathcal{R}_n \times D_u t)(T_n \times D_u t)^{j_\ell} \qquad (1.2') $$

$$ {}_2v^{(k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) = {}_2u^{(k-j_{\ell-1}-1)}_{j_1,\dots j_{\ell-2}}(n) \times (\mathcal{R}_n \times D_u t) \times (T_n \times D_u t)^{j_{\ell-1}} \qquad (1.3\ ) $$

$$ {}_2v'^{(k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) = {}_2u'^{(k-j_{\ell-1}-1)}_{j_1,\dots j_{\ell-2}}(n) \times ({}_1\mathcal{R}_n \times D_u t) \times (T_n \times D_u t)^{j_{\ell-1}} \qquad (1.3') $$

Démonstration .

Elle résulte de l'application du lemme 3.1 aux matrices $P_n \times D_{\frac{u_e}{n}}$ (resp. $P_n \times D_{\frac{ue}{\sqrt{n}}}$), avec $k = n$ et la partition en τ et E de l'espace des états.

Les autres relations sont une conséquence immédiatede la définition des des u et des v .

Lemme 4.2.

Si P n'a qu'une seule classe ergodique E_1 et des états transitoires τ,

Si $n \,{}_1\Gamma\, {}_1\mathcal{R}_n \to S_1$, alors

${}_1\lambda_{o,n}$ étant la valeur propre maximale de ${}_1R_n$, restriction de P_n à $E_1 \times E_1$

1) $n(1-{}_1\lambda_{o,n}) \longrightarrow q_1$, avec $q_1 = \langle {}_1\Gamma^*, S_1 V_o^t \rangle$

2) ${}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)\, V_o^1 \longrightarrow {}_2u'_{j_1,\dots j_{\ell-1}} V_o^1$, où

$$ {}_2u'_{j_1,\dots j_{\ell-1}} = \frac{1}{(\ell-1)!}\ \phi_1(u^1)\ \exp(-q_1)\,{}_1\Gamma\, {}_1S\, D_u (T.D_u t)^{j_1} B\, {}_1\Gamma\, (S_1 \times D_u t) $$

$(T \times D_u t)^{j_2} B \times \dots \times (T.D_u t)^{j_{\ell-1}} B_1)$, où ϕ_1 est la fonction caractéristique

ulti-dimensionnelle du chapitre 2 relative à R_1, Π_1 le projecteur orrespondant à la valeur propre $\lambda_o = 1$ de R_1.

émonstration.

) Nous avons la relation

$$\mathcal{L}_n V_o^t + R_{1n} V_o^1 = V_o^1$$

$$\Rightarrow n E(\lambda_{1o,n}) \mathcal{L}_n V_o^t = n(1-\lambda_{1o,n}) E(\lambda_{1o,n}) V_o^1$$

e membre de gauche tend vers $E(\lambda_{1o}) S_1 V_o^t$. Puisque

$(\lambda_{1o,n}) V_o^1 \longrightarrow \Pi_1 V_o^1 = V_o^1$ cela entraine $n(1-\lambda_{1o,n})$ reste borné, donc

$(1-\lambda_{1o,n})(E(\lambda_{1o,n}) V_o^1 - V_o^1) \longrightarrow 0$, donc $n(1-\lambda_{1o,n}) V_o^1 \longrightarrow$

$(\lambda_{1o}) S_1 V_o^t \equiv \Pi_1 S_1 V_o^t \Rightarrow n(1-\lambda_{1o,n}) \longrightarrow q_1$

) Soit d_1 le nombre de classes cycliques de la matrice limite R_1.
ous avons

$$u'^{(n-k)}_{j_1,\ldots j_{\rho-1}}(n) V_o^1 = \sum_{r_i} \sum_{\lambda_i} (R_{1n} * D \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{\lambda_1 d_1 + r_1} \mathcal{L}_{1n} * D_u t * (T_n * D_u t)^{j_1}$$

$$(B_{1n} * D \frac{u^1}{\sqrt{n}}) (R_{1n} * D \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{\lambda_2 d_1 + r_2} * \ldots * (T_n * D_u t)^{j_{\rho-1}} (B_{1n} D \frac{u^1}{\sqrt{n}}) * \cdots *$$

$$(R_{1n} * D \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{\lambda_\rho d_1 + r_\rho} V_o^1 \exp\left(- \sum i \left(< u^1, \frac{\Pi_{1n}^*}{\lambda_{o,n}} > \right) \sqrt{n} \right.$$

$$\hat{u} \cdot j_1 + j_2 + \ldots + j_{\rho-1} + r_1 + \ldots + r_\rho + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\rho) d_1 + 2(\rho-1) = n-k$$

'interprétation probabiliste de cette expression donnée dans l'introduction

sulte du corollaire 2.2.

a donc, en posant $\rho = j_1+j_2+\dots+j_\ell+\ell-1$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_\ell)\, d_1+r_1+r_2+\dots+r_\ell+\ell-1 = n-\rho$$

sons $N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i} = \left[\dfrac{n-\rho-(\ell-1)-(r_1+\dots+r_{\ell-1})}{d_1}\right]$, avec les notations

lemme 3.2.

us avons également, d'après un raisonnement analogue à celui fait dans dernier lemme

$$\sum_{\lambda_i} = \int_{K_{n-\rho,\ell-1,r_i}} f_{n\,j_i,r_i}(w_1,\dots w_{\ell-1})\, d\,w_1,\dots d\,w_{\ell-1},\ V_o^1 \quad \text{où}$$

$$(w_1,\dots w_{\ell-1})_{i,r_i} = \left(R_{1^n}\, D\, \frac{u^1}{\sqrt{n}}\right)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i} w_1)d_1+r_1} N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}\ \varrho_{1^n} * D_u t * (T_n * D_u t)^{j_1}_* $$

$$(B_{1^n} * D\, \frac{u^1}{\sqrt{n}}) \times \dots \times (R_{1^n} \times D\, \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i} w_i)d_1+r_i}\ N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}\ \varrho_{1^n} * D_u t\ (T_n\ D_u t)^{j_i}_{*} \dots$$

$$(R_{1,n} \times D\, \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i} w_\ell)d_1+r_\ell} \exp\Big(-\sum_{e\in E_1} i\, u_e \frac{\Gamma^*_{1\,e,n}}{\lambda_{1\,o,n}}\sqrt{n}\,(w_1+\dots+w_\ell)\Big)$$

ec $\quad w_1+\dots+w_2+\dots+w_\ell = 1$.

hypothèse faite entraine, puisque $\Gamma_1 > 0$, $n\, \varrho_1 n$ borné, donc

également .

$,r_i$

utre part, sur $K_{\ell-1}$, le théorème 3.2 entraine :

$$D\,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}w_i)d_1+r_i} - \sum_{g=o}^{d-1}(\lambda_1 g)^{r_i}\Big(\lambda_1 g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}w_i)d_1} E(\lambda_1 g)\to 0$$

vertu d'un raisonnement précédent, (voir lemme 3.4).

$$\Big(\lambda_1 g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}w_i)d_1} - \Big(\lambda_1 g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(\lceil\frac{n}{d_1}\rceil w_i)d} \longrightarrow 0,$$

$P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}w_i) - P(\lceil\frac{n}{d_1}\rceil w_i)$ reste borné quand $n \to \infty$.

$$\Big(P_{1^n}\times D\,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}w_i)d_1+r_i} - \sum_{g=o}^{d-1}(\lambda_1 g)^{r_1}\Big(\lambda_{1\,g,n,\frac{u^1}{\sqrt{n}}}\Big)^{P(\lceil\frac{n}{d_1}\rceil w_1)d_1} E(\lambda_1 g)\to 0$$

$$N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}\times \ell_{1^n}\times D_u t \;-\; \frac{n}{d_1}\,\ell_{1^n}\times D_{u_t} \longrightarrow 0$$

$$\Big(R_{1^n}\;D\,\frac{u^1}{\sqrt{n}}\Big)^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_1}w_\ell)d_1+r\ell}\; V^1_o \exp\Big(-i\Big(<u^1,\frac{\sqcap^{*}_{1\,n}}{\lambda_{1o,n}}>\Big)\; w_\ell\sqrt{n}\Big) \longrightarrow$$

$$\exp\,(-q_1 w_\ell)\,(\Phi_1(u^1))^{w'_\ell}\; V^1_o$$

, sur $K_{\ell-1}$, nous avons :

$$(w_1,\dots w_{\ell-1}) - g_n\;(w_1,\dots w_{\ell-1}) \longrightarrow 0\,.$$
$$r_i \qquad\qquad j_i,r_i$$

e :

$$= \Big(\sum_{g=o}^{d_1-1} (\lambda_1 g)^{r_1} (\lambda_1 g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{P(\lfloor \frac{n}{d_1} \rfloor w_1) d_1} E(\lambda_1 g) \Big) \exp(-i(< U^1, \frac{\Pi_1^* n}{\lambda_{o,n}} >) \sqrt{n}\, w_1) \times$$

$$\Big(n \times D_u t \times (T_n \times D_u t)^{j_1} \times (B_{1^n} \times \frac{Du^1}{\sqrt{n}}) \times \Big[\sum_{g=o}^{d_1-1} (\lambda_1 g)^{r_2} (\lambda_1 g, n, \frac{u^1}{\sqrt{n}})^{P(\lfloor \frac{n}{d_1} \rfloor w_2) d_2}$$

$$\lambda_1 g) \Big] \times \exp(-i(< U^1, \frac{\Pi_1^* n}{\lambda_{o,n}} >) \sqrt{n}\, w_2) \times \ldots \times \exp(-q_1 w_\ell) (\phi_1(u^1))^{w_\ell} V_o^1$$

e $w_\ell = 1 - \sum_{i=1}^{\ell-1} w_i$

est également bornée sur $K_{\ell-1}$. On peut appliquer le lemme 3.3,

qui entraine :

$$(n-k)_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}(n)\, V_o^1 - \int_{K_{\ell-1}} \sum_{r_i} g_{n\ j_i,r_i}(w_1,\ldots w_{\ell-1}) dw_1 \ldots dw_{\ell-1}$$

en sommant sur r_i , les $\lambda_1 g$, pour $g \neq 0$, disparaissent. Il nous te :

$$(P(\lfloor \frac{n}{d_1} \rfloor w_1) + P(\lfloor \frac{n}{d_1} \rfloor w_2) + P(\lfloor \frac{n}{d_1} \rfloor w_{\ell-1}))d_1$$

$$_{o,n,\frac{u^1}{n}}) \times$$

$$\exp(-i(< U^1, \frac{\Pi_1^* n}{\lambda_{o,n}} > \sqrt{n}\ (1-w_\ell)) \times E(\lambda_1 o) n \times D_u t\ (T_n \times D_u t)^{j_1} \times (B_{1^n} \times \frac{Du^1}{\sqrt{n}}) \times$$

$$\lambda_o) \times \ldots \times (B_{1^n} \times \frac{Du^1}{\sqrt{n}}) \exp(-q_1 w_\ell) (\phi_1(u^1))^{w_\ell}$$

que $n \to \infty$, le théorème 3.2 entraine $\sum_{r_i} g_{n\ j_i,r_i}$ converge

$$\phi_1(u^1) \exp(-q_1) \Pi_1 S_1 D_u t (T \times D_u t)^{j_1} B_1 \Pi_1 S_1 \times D_u t \times (T \times D_u t)^{j_2} B_1 \times \ldots \times$$

$$(T \times D_u t)^{j_{\ell-1}} B_1 V_o^1$$

sque la mesure de Lebesgue de $K_{\ell-1} = \frac{1}{(\ell-1)!}$, et que $\sum_{r_i} g_n$
uniformément borné sur $K_{\ell-1}$, on a j_i, r_i

$$(n-k)_{j_1,\dots j_{\ell-1}} V_o^1 \to \frac{1}{(\ell-1)!} \phi_1(u^1) \exp(-q_1) \Gamma_1 \times S_1 \times D_u t \,(T \times D_u t)^{j_1} B_1 \Gamma_1 (S_1 \times D_u t)$$

$$D_u t)^{j_2} B_1 \times \dots \times (T \times D_u t)^{j_{\ell-1}} B_1 V_o^1$$

c.q.f.d.

ollaire 4.1

s les conditions du lemme 4.1.,

$$(n)_{1,\dots j_\ell}(n) V_o^1 \longrightarrow (T \times D_u t)^{j_1} B_1 \; {}_2u'_{j_2,\dots j_\ell} V_o^1$$

$$(n)_{1,\dots j_\ell}(n) V_o^1 \quad \text{et} \quad {}_2v'^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) V_o^1 \longrightarrow 0$$

onstration.

première partie est évidente et résulte de la formule (1.1') et du
me 4.1 .

seconde partie résulte des formules 1.2' et 1.3' et du fait que la
vergence de ${}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}} V_o^1$, pour tout $u \in R^r$, entraine $\| {}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}} \|$
née.

effet, $\| {}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) V_o^1 \| \leq \sup_i \sum_{j \in E_1} \left| {}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)(i,j) \right|$

$$= \sup_i \sum_j \left({}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)(i,j) \right)_{\substack{u^t=0 \\ u^1=0}} .$$

$$= \| {}_2u'^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) V_o^1 \|_{\substack{u^t=0 \\ u^1=0}}$$

converge vers $\| {}_2u'_{j_1,\dots j_{\ell-1}} V_o^1 \|$, donc reste borné.

tendant vers 0, les termes envisagés tendent bien vers 0 .

me 4.3.

P a plusieurs classes ergodiques et des états transitoires et si

$$n \sqcap_i \chi_{i,n} \longrightarrow S_i$$

$$n \langle \sqcap_i^*, S_{n_{i,j}} \rangle \longrightarrow q_i^j$$

$$n (1 - \lambda_{i\,o,n}) \longrightarrow q_i$$

rs $2^u{}^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)\, V_o^e \longrightarrow 2^u{}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}\, V_o^e$

$$2^u{}_{j_1,\dots j_{\ell-1}} = \int_{K_{\ell-1}} H(t_1)\, S \times D_u t \times (T \times D_u t)^{j_1} B\, H(t_2)\, S \times D_u t (T \times D_u t)^{j_2} B \times \dots \times H(t_\ell)\, d\,t_1, d\,t_2 \dots d\,t_\ell$$

$H(t)$ est la matrice qui, sur $E_\alpha \times E_\beta$, vaut $\exp([\chi + i\,V]\,t)(\alpha,\beta)\,\sqcap_{\alpha,\beta}$, avec les notations du chapitre 3.

S est la matrice valant S_i sur $E_i \times \tau$

onstration.

même qu'au lemme 4.2., nous avons, si d = p.p.c.m. d_i

$$^{n-k)}_{1,\dots j_{\ell-1}}(n)\, V_o^e = \sum_{\rho_i} \int_{K_{n-\rho,\ell-1,\rho_i}} f_{n,\rho_i,j_i}(t_1,\dots t_{\ell-1})\,dt_1\dots dt_{\ell-1}$$

$$_{,\rho_i,j_i}(t_1,\dots t_{\ell-1}) = (R_n \frac{Du^e}{n})^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i} t_1)d+\rho_1} N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i} \chi_n\, D_u t \times (T_n \times D_u t)^{j_1}$$

$$\times \frac{Du^e}{n}) \times \dots \times (R_n \times \frac{Du^e}{n})^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i} t_\ell)d+\rho_\ell} V_o^e \quad , \text{ où } \quad t_\ell = 1 - \sum_{i=1}^{\ell-1} t_i$$

avec $\rho = j_1+\ldots+j_{\ell-1}+\ell-1$, $N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i} = \left[\frac{n-\rho-(\ell-1)-(\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_{\ell-1})}{d}\right]$

L'hypothèse (a) entraine :

$f_{n,\rho_i,j_i}(t_1,..t_{\ell-1})$ bornée en norme ; $K_{n-\rho,\ell-1,\rho_i} \supset K_{\ell-1}$ et

$L(K_{\ell-1}) = \frac{1}{(\ell-1)!} = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\ L(K_{n-\rho,\ell-1,\rho_i})$

L'interprétation probabiliste de f_{n,ρ_i,j_i} donnée dans l'introduction résulte immédiatement du corollaire 2.2.

Pour avoir une expression asymptotique de f_{n,ρ_i,j_i}, produit de matrice bornées en normes en vertu de (a), il suffit de trouver une expression asymptotique pour chacun des termes du produit, qui sont des types suivants :

① $(R_n \times D_{\underline{ue}}{}^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}\ t_i)d+\rho_i}_n)$

② $N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i}\ (\mathcal{X}_n \times D_u t)(T_n \times D_u t)^{j_i}\ B_n\ D_{\underline{ue}}{}_n$

③ $(R_n\ D_{\underline{ue}}{}^{P(N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i}\ t_\ell)d+\rho_\ell}_n)\ V^e_o$

Le vecteur (3) converge, en vertu du corollaire 3.3., vers le vecteur valant

$\exp((\mathcal{X}+ i\ V)t_\ell)V'_o(\alpha)$, sur E_α , et noté $(\exp(\mathcal{X}+i\ V)t_\ell\ V'_o)^*$

Les matrices du type (1) ont, en vertu des lemmes 3.4 et 3.5 , l'expression asymptotique suivante :

$$\sum_{s=0}^{[nt_i]} \sum_{k_1,..k_{s-1}} \int_{K_s} \sum_{r_i} \sum_{k_i,r_i} g_n^{\mu_{n,i}} (w_1..w_s)dw_1\ldots d_{w_s} \quad \text{sur} \quad E_\alpha \times E_\beta \qquad k_o=\alpha, k_s=\beta$$

$$= H^\beta_\alpha\ (\rho_i,t_i,n)$$

où $\mu_{n,i} = P(N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i}\, t_i)d+\rho_i = n\, t_i + O(1)$

$$\mu^{\mu_{n,i}}_{n\ k_i,r_i} = \sum_{g=o}^{d_\alpha-1} (\lambda_{\alpha}{}^{r_1}_{g})(\lambda_{\alpha\, g,n,\frac{u^\alpha}{n}})^{P(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_1)d} E(\lambda_{\alpha\, g})^{\left[\frac{nt_i}{d}\right]} S_{n\,\alpha,k_1} \times D\,\frac{u^{k_1}}{n}$$

$$\times \cdots \times \sum_{g=o}^{d_\beta-1} (\lambda_{\beta}{}^{r_{s+1}}_{g})(\lambda_{\beta\, g,n,\frac{u^\beta}{n}})^{P(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_{s+1})d} E(\lambda_{\beta\, g})$$

avec $w_{s+1} = 1 - \sum_{i=1}^{s} w_i$

$$\mu_{n,i} = \rho_i \mod(d) \Rightarrow r_1 + \cdots + r_i + \cdots + r_{s+1} = \rho_i \mod(d)$$

Soit $H(\rho_i,t_i,n)$ la matrice qui coincide sur $E_\alpha \times E_\beta$ avec $H^\beta_\alpha(\rho_i,t_i,n)$

Les matrices du type (2) restant bornées, en vertu de l'hypothèse (a), une expression asymptotique de

$$f_{n,\rho_i,t_i} \text{ est } H(\rho_1,t_1,n)N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i}\, \chi_{n^*}D_u t(T_{n^*}D_u t)^{j_1} B_{n^*D\,\frac{ue}{n}}$$

$$H(\rho_2,t_2,n)N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i}\, \chi_{n^*}D_u t(T_{n^*}D_u t)^{j_2} B_{n^*D\frac{ue}{n}} \times \cdots$$

$$\times\ N^{n-\rho}_{\ell-1,\rho_i}\, \chi_{n^*}D_u t(T_{n^*}D_u t)^{j_{\ell-1}} B_{n^*D\,\frac{ue}{n}} \times (\exp((\chi+i\,V)t_\ell)V'_o)^*$$

et même, puisque $N^{n-\rho}_{\ell-1,r_i} = \frac{n}{d} + O(1)$

$$H(\rho_1,t_1,n)\,\frac{n}{d}\,(\chi_{n^*}D_u t)\ (T\times D_u t)^{j_1} B_n\, D\frac{u^e}{n} \times \cdots \times \frac{n}{d}(\chi_{n^*}D_u t)(T_{n^*}D_u t)^{j_{\ell-1}}B_n$$

$$\times\, D\,\frac{u_e}{n} \times (\exp((\chi+i\,V)t_\ell)V'_o)$$

Donc, ρ_ℓ ayant disparu de l'expression ci-dessus, $\sum_{\rho_i} f_{n,\rho_i t_i}$ a pour expression asymptotique :

$$\Big(\sum_{\rho=0}^{d-1} H(\rho,t_1,n)\Big) \frac{n}{d}\ \ell_n \times D_u t \times (T_n \times D_u t)^{j_1}\ B_n \times D_{\frac{ue}{n}}\ \Big(\sum_{\rho=0}^{d-1} H(\rho,t_2,n)\Big) \times \dots$$

$$\times \Big(\sum_{\rho=0}^{d-1} H(\rho,t_i,n)\ \frac{n}{d}\ \ell_n \times D_u t \times (T_n \times D_u t)^{j_i}\ B_n \times D_{\frac{ue}{n}}\ \times \dots$$

$$\times \Big(\sum_{\rho=0}^{d-1} H(\rho,t_{\ell-1},n)\ \frac{n}{d}\ \ell_n \times D_u t \times (T_n \times D_u t)^{j_{\ell-1}}\ B_n \times D_{\frac{ue}{n}}\ \times (\exp((\ell + i\ V)t_\ell)V_0^!)$$

$g_{n\ k_i, r_i}^{\mu_n, i}$ ne dépend plus de $\mu_{n,i}$ que par r_i et la condition

$$r_1 + \dots + r_{s+1} = \rho_i \pmod{d}$$

De même $H_\alpha^\beta\ (\rho_i, t_i, n)$ ne dépend de $\mu_{n,i}$ que par t_i et cette condition sommer sur r_i vérifiant cette condition puis sommer sur ρ équivaut donc à sommer sur r_i sans condition.

$$\text{Donc}\ \sum_{\rho=0}^{d-1} H_\alpha^\beta\ (\rho, t_i, n) = \sum_{s=0}^{[nt_i]} \sum_{k_1,\dots k_{s-1}} \int_{K_j}^{d} \sum_{g=0}^{\alpha-1} \Big(\sum_{r_1=0}^{d-1} ({}_\alpha\lambda_g)^{r_1}\Big)$$

$$({}_\alpha\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}{}^{\alpha})^{P(\left[\frac{nt_i}{d}\right] w_1)d}\ E({}_\alpha\lambda_g) \times \left[\frac{nt_i}{d}\right] S_{n\ \alpha,k_1}\ \frac{Du^{k_1}}{n} \times \dots \times$$

$$\sum_{g=0}^{d_{\beta-1}} \Big(\sum_{r_{s+1}=0}^{d-1} ({}_\beta\lambda_g)^{r_{s+1}} ({}_\beta\lambda_{g,n,\frac{u}{n}}{}^{\beta})^{P(\left[\frac{nt_i}{d}\right] w_{s+1})d}\ E({}_\beta\lambda_g)\ dw_1 \dots dw_s$$

$$\text{Mais}\ \sum_{r=0}^{d-1} ({}_e\lambda_g)^r = 0 \quad \text{si} \quad g \neq 0$$

$$= d \quad \text{si} \quad g = 0 \ .$$

Il reste :

$$\sum_{s=o}^{\left[nt_i\right]} \sum_{k_1,\dots k_{s-1}} \int_{K_s} \left(\lambda_{\alpha o,n,\frac{u}{n}}^{\alpha}\right)^{P\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_i\right)d} E(\lambda_{\alpha o})\times d\times \left[\frac{nt_i}{d}\right] S_{n\,\alpha,k_1} \times D\,\frac{u}{n}^{k_1}\times \dots$$

$$\times \left(\lambda_{\beta o,n,\frac{u}{n}}^{\beta}\right)^{P\left(\left[\frac{nt_i}{d}\right]w_{s+1}\right)d} \times E(\lambda_{\beta o})\times d$$

En passant à la limite, on voit que

$$\sum_{\rho=o}^{d-1} H_{\alpha}^{\beta}(p,t_i,n) \longrightarrow d \sum_{s=o}^{\infty} \sum_{k_s,\dots k_{s-1}} t_i^{s-1} \int_{K_s} \exp\left((-q_{\alpha}+i\langle U_{\alpha}, \sqcap_{\alpha}^{*}\rangle)w_1 t_i\right) q_{\alpha}^{k}$$

$$\exp\left((-q_{k_1} \quad i\langle U_{k_1}.\sqcap_{k_1}^{*}\rangle\right)w_2 t_i)\times\dots$$

$$\times \exp\left(-q_{\beta}+i\langle U_{\beta}, \sqcap_{\beta}^{*}\rangle\right)w_s t_i)\, dw_1 \dots\dots dw_{s-1}\, \sqcap_{\alpha,\beta}$$

Quantité qui n'est autre que $d \exp((\wp+iV)t_i(\alpha,\beta)\sqcap_{\alpha,\beta}$

Une expression asymptotique de $\sum_{\rho_i} f_{n,\rho_i,t_i}$ est alors, si $H(t)$ dési

gne la matrice valant $\exp((\wp+iV)t_i)(\alpha,\beta)\sqcap_{\alpha,\beta}$ sur $E_\alpha \times E_\beta$,

$$H(t_1)\times n\wp_n\times D_u t\times(T\times D_u t)^{j_1} B\times H(t_2)\, n\wp_n\times D_u t(T\times D_u t)^{j_2} B\times\dots\times H(t_\ell)\, V_o^e$$

Examinons la structure du produit $H(t)\, n\wp_n$.

$H(t)$ coincide, sur $E_\alpha \times E_\beta$, avec $a_{\alpha,\beta}\sqcap_{\alpha,\beta}$, où $a_{\alpha,\beta}$ désigne

$\exp((\wp+iV)t)(\alpha,\beta)$

$n\wp_n$ coincide, sur $E_\beta \times \mathcal{Z}$, avec $n\wp_{\beta n}$.

Donc $H(t)n\wp_n$ coincide, sur $E_\alpha \times \mathcal{Z}$, avec $\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha,\beta}\sqcap_{\alpha,\beta} n\wp_{\beta n}$.

Mais $\prod_{\alpha,\beta} \prod_{\beta} = \prod_{\alpha,\beta}$, et $\prod_{\beta} n \chi_{\beta}^{n} \longrightarrow S_\beta$, d'après l'hypothèse .

Donc $\mathbf{M}(t) n \chi_n$ converge vers la matrice valant, sur $E_\alpha \times \tau$

$\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha,\beta} \prod_{\alpha,\beta} S_\beta$, qui peut être considéré comme produit de $H(t)$ e

d'une matrice S valant S_β sur $E_\beta \times \tau$

Les expressions approchées successives de f_{n,ρ_i,t_i} étant uniformément

bornée sur $K_{\ell-1}$, le théorème de Lebesgue permet de conclure que

$$2u^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)\, V_o^e \longrightarrow$$

$$\int_{K_{\ell-1}} H(t_1) S.D_u t (T.D_u t)^{j_1} B\, H(t_2)(S.D_u t)(T.D_u t)^{j_2} B \times \dots H(t_\ell) V_o^e dt_1 \dots d$$

c.q.f.d.

Corollaire 4.2.

Dans les conditions du lemme 4.3

$$1u^{(n)}_{j_1 \dots j_\ell}(n)\, V_o^e \longrightarrow (T.D_u t)^{j_1} B\, {}_2u_{j_1,\dots j_\ell}\, V_o^e$$

$$1v^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) \quad \text{et} \quad 2v^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n)\, V_o^e \longrightarrow 0 .$$

Démonstration.

Elle est identique à celle du corollaire 4.1.

Les inégalités suivantes ont lieu : si $\| n \chi_n \| < A$, $\| \chi_n \| < \varepsilon$ pour

n assez grand.

$$\left\| 2u^{(n-k)}_{j_1, j_2 \dots j_{\ell-1}}(n) \right\| \leqslant A^{\ell-1} \frac{c^{\ell-1}_{n-k-(\ell-1)-h}}{n^{\ell-1}} \left\| (T_n)^{j_1} \right\| . \left\| (T_n)^{j_2} \right\| . \left\| (T_n)^{j_{\ell-1}} \right\|$$

$$h = j_1 + \dots + j_{\ell-1}$$

mais $\exists \rho$, $0 < \rho < 1$, tel que $\sigma(T_n) \subset B(o,\rho)$, pour n assez grand, en vertu des résultats du chapitre 1 et du fait que T limite de T_n , a son spectre $\subset B(o,r)$ $\quad 0 < r < 1$

Donc $T_n^j = \frac{1}{2_i \sqcap} \int_{B^*(o,\rho)} \lambda^j \, (\lambda I - T_n)^{-1} \, d\lambda$

En vertu des résultats du chapitre 1, $\| (\lambda I - T_n)^{-1} \| \leq K$ pour n assez grand, et $\| (T_n)^j \| \leq \rho^{j+1} K$

Donc, en posant $A_1 = \frac{K}{1-\rho}$

$$\sum_{i} \left\| {}^{2}u^{(n-k)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) \right\| \leq \frac{A^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \left(\sum_{j=o}^{\infty} \| (T_n)^j \| \right)^{\ell-1} \leq \frac{(A\,A_1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \qquad (a)$$

De même

$$\| {}^{1}u^{n}_{j_1,\dots j_\ell}(n) \| \leq \| T_n^{j_1} \| \frac{A^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \| T_n^{j_2} \| \dots \| T_n^{j_\ell} \| \text{ , Donc}$$

$$\sum_{j_i} \| {}^{1}u^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) \| \leq A_1 \frac{(A\,A_1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \qquad (b)$$

De même

$$\| {}^{1}v^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) \| \leq \| T_n^{j_1} \| \frac{A^{\ell-2}}{(\ell-2)!} \| T_n^{j_2} \| \times \dots \times \| T_n^{j_{\ell-1}} \| \times \varepsilon_n \times \| T_n^{j_\ell} \|$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j_i} \| {}^{1}v^{(n)}_{j_1,\dots j_\ell}(n) \| \leq A_1^2 \times \frac{(A\,A_1)^{\ell-2}}{(\ell-2)!} \times \varepsilon_n \qquad (c)$$

$$\left\| 2v^{(n)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) \right\| \leq \frac{(A_1)^{\ell-2}}{(\ell-2)!} \times \varepsilon_n \times \left\| T_n^{j_1} \right\| \times \dots \left\| T_n^{j_{\ell-1}} \right\|$$

$$\sum_{j_i} \left\| 2v^{(n)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n) \right\| \leq \frac{(A\,A_1)^{\ell-2}}{(\ell-2)!} \times A_1 \times \varepsilon_n \qquad (d)$$

Les mêmes inégalités sont valables avec les u' et les v' .

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes.

Théorème 4.1

Si P a une seule classe ergodique E_1 et des états transitoires $\mathcal{T}$

Si $n \sqcap_1 \mathcal{R}_1 n$ converge vers S_1 ,

Le vecteur caractéristique de l'ensemble des variables aléatoires

$(n)\,\xi_t(n)$, $(n)\,\xi_e(n) - \sqrt{n}\ \dfrac{\sqcap_1^{*e}(n)}{\lambda_{1\,o,n}}$, $t \in \mathcal{T}$, $e \in E_1$ converge vers

le vecteur valant

$$(I^t - T.Du^t)^{-1}\ B_1\ V_o^1 \exp(\lambda(u^t) - q_1)\ \Phi_1(u^1) \quad \text{sur } \mathcal{T}$$

$$V_o^1 \exp(\lambda(u^t) - q_1)\ \Phi_1(u^1) \quad \text{sur } E_1$$

où

$$q_1 = \langle \sqcap_1^*,\ S_1\ V_o^t \rangle$$

$$\lambda(u^t) = \langle \sqcap_1^*,\ S_1 \times D_u t (I^t - T.D_u t)^{-1}\ B_1\ V_o^1 \rangle$$

Φ_1 est la loi limite relative à $\underset{1}{R}$.

Démonstration.

Puisque $(I^t - T.D_u t)^{-1} = \sum_{j=o}^{\infty} (T.D_u t)^j$

$$\sum_{j_i} 2^{u'_{j_1,\dots j_{\ell-1}}}$$

$$= \frac{1}{(\ell-1)!}\, \phi_1(u^1)\, \exp(-q_1)(\Pi_1 .(S_1.D_u t)(I^t - T.D_u t)^{-1} B_1)^{\ell-1}\, V_o^1$$

mais

$$(\Pi_1 .S_1.D_u t(I^t - T.D_u t)^{-1} B_1 \Pi_1)^{\ell-1} V_o^1 = (\Pi_1 .S_1\, D_u t(I^t - T.D_u t)^{-1} B_1)^{\ell-1}\, V_o^1)$$

puisque $\Pi_1^2 = \Pi_1$ et $\Pi_1 V_o^1 = V_o^1$

Si M est une matrice (ℓ_1, ℓ_1) ,

$$(\Pi_1 M \Pi_1)(i,j) = \sum_{h,k} \Pi_1^{*h} M_h^k \Pi_1^{*j} = \langle \Pi_1^* , M V_o^1 \rangle \Pi_1^{*j}$$

donc $\Pi_1 M \Pi_1 = \langle \Pi_1^*, M V_o^1 \rangle \Pi_1$

et l'on en tire, puisque $(\Pi_1)^{\ell-1} V_o^1 = V_o^1$

$$\sum_{j_i} 2^{u'_{j_1,\dots j_{\ell-1}}} =$$

$$= \frac{1}{(\ell-1)!}\, \phi_1(u_1)\, \exp(-q)\, (\langle \Pi_1^*, S_1.D_u t(I^t - T.D_u t)^{-1} B_1 \rangle)^{\ell-1}\, V_o^1$$

La série $\sum_{\ell} \sum_{j_i} \| 2^{u'^{(n)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)} \|$ étant majorée par une série convergente en ℓ , d'après les inégalités précédant le théorème, on peut passer à la limite terme à terme dans la série $\sum_{\ell} \sum_{j_i} 2^{u'^{(n)}_{j_1,\dots j_{\ell-1}}(n)}$

ce qui conduit bien à la loi limite indiquée ; les inégalités (a) , (b), (c), (d) et l'application du corollaire 4.1. permettent de conclure.

Lemme 4.4.

Si L et M sont deux matrices (r,r), nous avons la formule suivante

$$\exp t(L+M) = \exp(tL) + \int_0^t \exp(t_1 L)\, M \exp(t-t_1) L \, d t_1$$

$$+ \iint_{t_1+t_2 \leq t} \exp(t_1 L)\, M \exp(t_2 L)\, M \exp((t-t_1-t_2)L) dt_1\, dt_2$$

$$+ \ldots + \int_{\sum_{i=1}^{\ell-1} t_i \leq t} \exp(t_1 L) M \exp(t_2 L) M \times \cdots \times \exp(t_{\ell-1} L) M \times \exp(t_\ell L) dt_1 \ldots dt_{\ell-1} +$$

Démonstration.

Considérons le développement du membre de droite : chaque intégrale est une fonction continue de t, et la série en ℓ a son terme général majoré par $\exp(t \| L \|)\ \frac{M^{\ell-1} t^{\ell-1}}{\ell!}$ terme général d'une série en ℓ convergente. La somme est donc une fonction continue de t.

D'autre part, posons

$$P_\ell(t) = \int_{\sum_{i=0}^{\ell-1} t_i \leq t} \exp(t_1 L) M \exp(t_2 L) M \times \ldots \times \exp(t_{\ell-1} L) M \times \exp(t_\ell L) dt_1 \ldots dt_\ell$$

Pour montrer que la somme de la série des P_ℓ vérifie une équation de semi groupe en t, il suffit de vérifier que :

$$P_\ell(t+t') = \sum_{j=0}^{\ell} P_{\ell-j}(t)\, P_j(t') \qquad (1)$$

La relation se démontre aisément par récurrence :

a) si $\ell = 0$, $P_0(t+t') = \exp(t+t')L = \exp(tL) \exp(t'L)$

b) $P_{j+1}(t) = \int_0^t \exp(uL)M\, P_j(t-u)du$. Supposons la formule (1) vraie pour $j = \ell$

$$P_{\ell+1}(t+t') = \int_0^{t+t'} \exp(uL)M\, P_\ell(t+t'-u)du = \int_0^t \exp(uL)M\Big(\sum_{j=0}^{\ell} P_{\ell-j}(t-u)P_j(t')du\Big)$$

$$+\int_{t+}^{t+t'} \exp(uL)M\, P_\ell(t+t'-u)du$$

Or la première intégrale vaut $\sum_{j=0}^{\ell} P_{\ell+1-j}(t)\, P_j(t')$, quant à la seconde nous avons, en posant $u-t = v$.

$$\int_0^{t'} \exp(vL)L\exp(tL).M\, P_\ell(t'-v)dv = \exp tL \int_0^{t'} \exp(vL)\, M\, P_\ell(t'-v)dv$$

$$= P_0(t)\, P_{\ell+1}(t')$$

On a donc bien la formule (1) au rang $\ell+1$.

La somme de la série est donc un semi groupe continu en t , qui s'écrit $A_0 \exp(\mathcal{L} t)$.

a) $t = 0 \Rightarrow A_0 = I$, en vertu de l'expression de la série

b) $\mathcal{L} = \underset{t \to 0}{\text{limite}} \dfrac{\exp(\mathcal{L} t)-I}{t} = \underset{t \to 0}{\text{limite}} \left[\dfrac{\exp tL-I}{t}\right.$

$$+ \frac{1}{t}\int_0^t \exp(t_1 L)M \exp((t-t_1)L)dt + A(\ell,t)$$

où $\|A(\ell,t)\| \leq \frac{1}{t} \sum_{\ell=2}^{\infty} \exp(t\|L\|) \frac{M^{\ell-1} t^{\ell}}{\ell!} \longrightarrow 0$ si $t \to 0$

$$\frac{\exp(t\,L)-I}{t} \longrightarrow L$$

$$\int_0^t \exp(t_1 L) M \exp(t-t_1) L \, dt = \int_0^t \exp((t-\beta)L) M \exp(\beta L) d\beta$$

$$= \exp(tL) \int_0^t \exp(-\beta L) M \exp(\beta L) \, d\beta$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \exp(t_1 L) M \exp((t-t_1)L) dt_1 = \frac{1}{t} \int_0^t \exp(-\beta L) M \exp(\beta L) d\beta \times \exp(tL)$$

Le premier terme du produit $\longrightarrow$ M, le second tend vers I

Donc on a bien $\mathcal{R} = L+M$

c.q.f.d.

Théorème 4.2.

Si P a plusieurs classes ergodiques $E_1, \ldots E_s$ et des états transitoires τ ,

Si 1) $n \Pi_i \mathcal{R}_i n \longrightarrow S_i$

2) $n(1 - \lambda_{i\,o,n}) \longrightarrow q_i$

3) $n \langle \Pi_i^* , \underset{i,j}{S_n} V_o^j \rangle \longrightarrow q_i^j$

Le vecteur caractéristique limite de l'ensemble des variables aléatoires $\xi_t(n) \quad \frac{\xi_e(n)}{n}$ est le vecteur valant

$$(1^t - T.Du^t)^{-1} \Big(\sum_{\alpha=1}^{s} B_\alpha V_o^\alpha \exp(\Lambda(u^t) + \mathcal{R}_+ + i\,V)\, V_o'(\alpha) \Big) \quad \text{sur } \tau$$

$$\exp((\Lambda(u^t) + \mathcal{R}_+ + i\,V))\; V_o'(\alpha) \quad \text{sur } E_\alpha$$

B_α est la restriction de P à $\tau \times E_\alpha$

V_o^α est la restriction de V_o à E_α

V est la matrice diagonale d'éléments $v_i = \langle u^i, \sqcap_i^* \rangle$

V_o' est le vecteur à s lignes égales à 1

$\mathcal{Q}$ est la matrice (s,s) d'élements q_i^j , $i \neq j$, $-q_i$ sur la diagonale.

$\Lambda(u^t)$ est la matrice (s,s) d'éléments $\Lambda(u^t)(\alpha,\beta) =$

$$= \langle \sqcap_\alpha^*, S_\alpha * D_u t * (I^t - T.D_u t)^{-1} B_\beta V_o^\beta \rangle$$

Démonstration.

Nous avons :

$$\sum_{j_1,\dots j_{\ell-1}} 2^u{}_{j_1,j_2,\dots j_{\ell-1}}$$

$$= \int_{K_{\ell-1}} H(t_1)\, S.D_u t (I^t - T.D_u t)^{-1} B\, H(t_2).S.D_u t (I^t - T.D_u t)^{-1} B$$

$$* \dots * H(t_\ell)\, dt_1 \dots dt_{\ell-1}$$

Cette matrice peut s'écrire, en posant $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q} + i V$, sur $E_\alpha \times E_\beta$.

$$\int_{K_{\ell-1}} \sum_{k_i} \exp(\mathcal{Q}_1 t_1)(\alpha,k_1) \sqcap_{\alpha,k_1} * S_{k_1} * D_u t (I^t - T.D_u t)^{-1} B_{k_2}$$

$$\exp(\mathcal{Q}_1 t_2)(k_2,k_3) \sqcap_{k_2,k_3} * \dots$$

$$* S_{k_i} * D_u t . (I^t - T.D_u t)^{-1} B_{k_{i+1}} * \dots$$

$$* \exp(\mathcal{Q}_1 t_\ell)(k_{2(\ell-1)}, \beta) dt_1 \dots dt_{\ell-1}$$

mais

$$\sqcap_{u,v} S_v * D_u t (I^t - T.D_u t) B_w \sqcap_{w,z} = (\Lambda(u^t))(v,w) \sqcap_{u,z}$$

Donc l'intégrale vaut

$$\sum_{k_i} \int_{K_{\ell-1}} \exp(\lambda_1 t_1)(\alpha,k_1) \wedge (u^t)(k_1,k_2)\, \exp(\lambda_1 t_2)(k_i,k_3) \wedge (u^t)(k_3,k_4)$$

$$\times \ldots \times \exp(\lambda_1 t_\ell)(k_{2(\ell-1)}\beta) \sqcap_{\alpha,\beta} dt_1 \ldots\ldots dt_{\ell-1}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{j_1,\ldots j_{\ell-1}} 2^{u_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}^{(i,j)}} = \int_{K_{-1}} \exp(\lambda_1 t_1) \wedge (u^t) \exp(\lambda_1 t_2) \wedge (u^t) \ \ldots$$

$$\exp(\lambda_1 t_\ell) dt_1 \ldots dt_{\ell-1} \quad (\alpha,\beta) \times \sqcap_{\alpha,\beta}$$

si $i \in E_\alpha$, $j \in E_\beta$

Le lemme 4.4 entraine le résultat, puisqu'on peut passer à la limite terme à terme.dans la série

$$\sum_{\ell} \sum_{j_i} 2^{u_{j_1,\ldots j_{\ell-1}}^{(n\ k)}(n)} \ .$$

- CHAPITRE V -

Nous étudierons dans ce chapitre d'autres lois limites, obtenues
n supprimant l'une des conditions de convergence des théorèmes précédents
t en ajoutant des conditions supplémentaires.

- P a une seule classe ergotique et des états transitoires.-

lors $P_x Du$ a une valeur propre et une seule $\lambda_o(u)$ qui $\to 1$ si $u \to 0$
osons $\Delta(u,\lambda(u))$: déterminant $\left[P_x Du - \lambda(u)\, I\right]$, où $u \to \lambda(u)$ est
ne fontion analytique de u - Δ est alors une fonction analytique de u.
ous avons $\Delta(u, \lambda_o(u)) \equiv 0$.

oit $\delta_{j_1,\dots j_k}(u)$ le mineur extrait de $\Delta(u,\lambda(u))$ en enlevant les
ignes et les colonnes n° $j_1, j_2, \dots j_k$. Nous enlèverons l'argument u
uand il n'y a pas d'ambiguité.

emme 5.1.

$$\frac{\partial}{u_j}\,\delta_{j_1,j_2,\dots j_k} = i\left[\delta_{j_1,\dots j_k} + \lambda\,\delta_{j_1,\dots j_k,j}\right](1 - \delta^{j}_{j_1,\dots j_k}) - \frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\left[\sum_h \delta_{j_1,j_2,\dots j_k,h}\right]$$

ù $\delta^{j}_{j_1,\dots j_k} = 1$ si $j \in \{j_1,\dots j_k\}$, $= 0$ autrement.

émonstration

) Supposons d'abord $j \notin \{j_1,\dots j_k\}$. La dérivée d'un déterminant s'ob-
ient, on le sait, en additionnant les déterminants obtenus en dérivant
ne colonne du déterminant initial, laissant les autres inchangées

i $i \neq j$, la colonne n° i de δ a pour dérivée $-\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}$ à la $i^{\text{ème}}$ ligne
t 0 ailleurs. Le déterminant obtenu est donc $= -\frac{\partial\lambda}{\partial u_j} \times \delta_{j_1,\dots j_k,i}$

a colonne n°j a pour dérivée $i\, p\varrho_{,j} e^{iuj}$ à la ligne n°ℓ, et

$P_{j,j} e^{iuj} - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}$ à la ligne n°j, qui s'écrit encore

$$i\,(P_{jj} e^{iuj} - \lambda) + i\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}$$

n développant le déterminant correspondant par rapport aux élements
e la colonne n°j, on voit qu'il vaut : $i\varrho_{j_1,\dots j_k} + (i\lambda - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}) \times \varrho_{j_1,j_k,j}$

n additionnant les déterminants ainsi obtenus, on aboutit bien à la
ormule désirée.

) si $j \in \{j_1,\dots j_\varrho\}$, la colonne n°j ne figure pas dans $\varrho_{j_1,\dots j_k}$
t l'on a bien encore la formule voulue.

orollaire 5.1.

$$) \quad \frac{\partial \Delta}{\partial u_j} \equiv i(\Delta + \lambda \varrho_j) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \Big(\sum_h \varrho_h\Big)$$

$$) \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_j \partial u_k} \equiv -\Big[\Delta + \lambda \varrho_k + \lambda(\varrho_j + \lambda \varrho_{j,k})(1-\delta^k_j)\Big] - i\frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\Big[\sum_{h\neq j}(\varrho_h + \lambda \varrho_{h,j})\Big]$$

$$- i\,\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h\neq k}(\varrho_h + \lambda \varrho_{h,k})\Big] - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k}\Big[\sum_h \varrho_h\Big]$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \times \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\Big(\sum_{h,h'} \varrho_{h,h'}\Big)$$

$$) \quad \frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j \partial u_k \partial u_\varrho} \equiv -i\Big[\Delta + \lambda(\varrho_j + \varrho_k + \varrho_\varrho) + \lambda^2(\varrho_{j,\varrho} + \varrho_{k,\varrho} + \varrho_{j,k}) + \lambda^3 \varrho_{j,k,\varrho}\Big]$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_\varrho}\Big[\sum_{h\neq j,k}(\varrho_h + \lambda \varrho_{h,k} + \varrho_{h,j}) + \lambda^2 \varrho_{h,j,k}\Big] + \text{termes symétriques}$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \times \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\Big[\sum_{h,h'\neq\varrho} i(\varrho_{h,h'} + \lambda \varrho_{h,h',\varrho})\Big] + \text{termes symétriques}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\frac{\partial \lambda}{\partial u_\varrho}\Big(\sum_{h,h',h''} \varrho_{h,h'h''}\Big) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k} \sum_{h\neq\varrho} i(\varrho_h + \lambda \varrho_{h,\varrho})$$

+ termes symétriques

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j \partial u_k}\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big[\sum_{h,h'} \wp_{h,h'} + \text{termes symétriques} - \frac{\partial^3\lambda}{\partial u_j \partial u_k \partial u_\ell}\Big[\sum_h \wp_h\Big]$$

i $j \neq k \neq \ell$

$$= -i\,(\Delta + \lambda(\wp_j + \wp_\ell) + \lambda^2 \wp_{j,\ell}) + \frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big[\sum_{h\neq j}(\wp_h + \lambda\wp_{h,j})\Big]$$

$$2\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h\neq j\neq \ell}(\wp_h + \lambda(\wp_{h,j} + \wp_{h,\ell}) + \lambda^2\wp_{h,j,\ell}\Big] - \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\Big[\sum_{h\neq j} i(\wp_h + \lambda\wp_{h,j}\Big]$$

$$i\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j \partial u_\ell}\Big[\sum_{h\neq j}(\wp_h + \lambda\wp_{h,j})\Big] + 2i\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big[\sum_{h,h'\neq j}(\wp_{h,h';j})$$

$$i\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^2\Big[\sum_{h,h'\neq\ell} i(\wp_{h,h'} + \lambda\wp_{h,h',\ell})\Big] - \Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^2\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big(\sum_{h,h',h''}\wp_{h,h',h''}\Big)$$

$$2\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j \partial u_\ell}\Big[\sum_{h,h'}\wp_{h,h'}\Big] + \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big(\sum_{h,h'}\wp_{h,h'}\Big) - \frac{\partial^3\lambda}{\partial^2 u_j \partial u_\ell}\Big[\sum_h \wp_h\Big]$$

$j = k \neq \ell$.

$$-i(\Delta + \lambda\wp_j) + 3\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\sum_{h\neq j}(\wp_h + \lambda\wp_{h,j}) - 3i\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\Big[\sum_{h\neq j}\wp_n + \lambda\wp_{n,j}\Big]$$

$$+ 3i\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^2\sum_{h,h'\neq j}(\wp_{h,h'} + \lambda\wp_{h,h',j}).$$

$$- \Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^3\sum_{h,h',h''}(\wp_{h,h',h''})$$

$$+ 3\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big(\sum_{h,h'}\wp_{h,h'}\Big) - \frac{\partial^3\lambda}{\partial u_j^3}\Big[\sum_h \wp_h\Big]$$

$j = k = \ell$.

faisant $\lambda(u) = \lambda_o(u)$, on obtient par ces formules la forme des
rivées partielles jusqu'au 3ème ordre de $\lambda_o(u)$.

Démonstration.

Elle consiste en l'application successive du lemme 5.1 à chaque formule.

Le calcul de $\frac{\partial \Delta}{\partial u_j}$ n'est autre que le lemme 5.1, appliqué à $)j_i(= \emptyset$.

En dérivant par rapport à k, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial u_j \partial u_k} = i\left[\frac{\partial \Delta}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \varphi_j\right] - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k}\left(\sum_h \varphi_h\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\left(\sum_h \frac{\partial}{\partial u_k} \varphi_h\right)$$

$$= i\left[i(\Delta + \lambda \varphi_k) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left(\sum_{h \neq j} \varphi_h\right) + \lambda\left[i(\varphi_j + \lambda \varphi_{j,k})\right.\right.$$

$$\left.\left.(1 - \delta_j^k)\right] - \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left(\sum_h \varphi_{h,j}\right)\right]$$

$$- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k}\left[\sum_h \varphi_h\right] - \frac{\partial \lambda}{\partial u_j}\left[\sum_h (i(\varphi_h + \lambda \varphi_{h,k})(1 - \delta_k^h)\right.$$

$$\left. - \sum_{h,h'} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \varphi_{h,h'}\right]$$

qui est bien la formule désirée.

Si $j \neq k \neq \ell$, $\frac{\partial^3 \Delta}{\partial u_j \partial u_k \partial u_\ell}$

$$-\left[\frac{\partial \Delta}{\partial u_\ell} + \frac{\partial \lambda}{\partial u}(\varphi_k + \varphi_j + 2\lambda \varphi_{j,k}) + \lambda\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_\ell} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_\ell} + \lambda \frac{\partial \varphi_{j,k}}{\partial u_\ell}\right.\right.$$

$$- i \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left[\sum_{h \neq j}\left(\frac{\partial}{\partial u_\ell}\left[\sigma\right] \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \varphi_{h,j} + \lambda \frac{\partial}{\partial u_\ell} \varphi_{h,j}\right)\right] + \text{terme symétrique en j}$$

$$- i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_k \partial u_\ell}\left[\sum_{n \neq j}(\varphi_n + \lambda \varphi_{h,j})\right] \qquad + \text{terme symétrique en j}$$

$$- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k}\left[\sum_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial u_e}\right] \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j \partial u_k \partial u_\ell}\left[\sum_h \lambda_h\right] + \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\left[\sum_{h,h'} \frac{\partial \varphi_{h,h'}}{\partial u_e}\right]$$

$$- \left[i(\Delta + \lambda \varphi_\ell)\right] - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell}\left(\sum_{h \neq j,k} \varphi_h - 2\lambda \varphi_{j,k}\right) + \lambda\left[i(\varphi_k + \varphi_j + \lambda(\varphi_{k,\ell} + \varphi_{j,k}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \varphi_{j,k}) + \lambda^2 \varphi_{j,k,\ell}\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_e}\left[\sum_h (\varphi_{k,h}) + \sum_h (\varphi_{j,h})\right.$$

$$\left. - \lambda \sum_h \varphi_{j,k,h}\right]$$

$$- i \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \Big[\sum_{h \neq j, \ell} (i(\wp_h + \lambda \wp_{h,\ell}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \sum_{h,h' \neq j} \wp_{h,h'} \Big]$$

$$+ \sum_{h \neq j, \ell} \lambda_i (\wp_{h,j} + \lambda \wp_{h,j,\ell}) - \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \sum_{h,h'} \wp_{h,j,h'} \Big]$$

+ terme symétrique en j

$$- i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_k \partial u_\ell} \Big[\sum_{h \neq j} (\wp_h + \lambda \wp_{h,j}) \Big] + \text{terme symétrique en j}$$

$$- \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j \partial u_k} \Big[\sum_{h \neq \ell} i(\wp_h + \lambda \wp_{h,\ell}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} (\sum_{h,h'} \wp_{h,h'}) \Big]$$

$$+ \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k} \Big[\sum_{h,h' \neq \ell} i(\wp_{h,h'} + \lambda \wp_{h,h',\ell})$$

$$- \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \sum_{h,h'h''} \wp_{h,h'h''} \Big]$$

$$- \frac{\partial^3 \lambda}{\partial u_j \partial u_k \partial u_\ell} \Big[\sum_h \wp_h \Big] .$$

réordonnant les termes, on tombe sur la formule voulue.

$j = k$, $\neq \ell$, on a

$$\frac{\Delta}{2}_j = -(\Delta + \lambda \wp_j) - 2i \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \Big[\sum_{h \neq j} (\wp_h + \lambda \wp_{h,j}) \Big] - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u_j^2} \Big[\sum_h \wp_h \Big]$$

$$+ (\frac{\partial \lambda}{\partial u_j})^2 \Big[\sum_{h,h'} \wp_{h,h'} \Big]$$

$$\frac{\Delta}{2 \partial u_\ell}_j = - \Big[+i(\Delta + \lambda \wp_\ell) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} (\sum_{h \neq j} \wp_h) + \lambda (i(\wp_j + \lambda \wp_{j,\ell}) - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} (\sum_h \wp_{j,h}) \Big]$$

$$- 2i \frac{\partial \lambda}{\partial u_j} \Big[\sum_{h \neq j, \ell} i(\wp_h + \lambda \wp_{h,j}) + \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \sum_{h \neq j} \wp_{h,j} - \frac{\partial \lambda}{\partial u_\ell} \sum_{h \neq j} \wp_{h,h'}$$

$$+ \lambda \wp_{h,h',j}) \Big]$$

$$-\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\Big[\sum_{h\neq\ell} i(\varrho_h+\lambda\varrho_{h,\ell})-\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\Big(\sum_{h,h'}\varrho_{h,h'}\Big)\Big]-\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\partial u_\ell}\cdot 2i\Big[\sum_{h\neq j}(\varrho_h+\lambda\varrho_{h,j})\Big]$$

$$+2\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j\partial u_\ell}\Big[\sum_{h,h'}\varrho_{h,h'}\Big]-\frac{\partial^3\lambda}{\partial u_j^2\partial u_\ell}\Big[\sum_h\varrho_h\Big]+\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^2\Big[\sum_{\substack{h,h'\\ \neq\ell}} i(\varrho_{h,h'}+\lambda\varrho_{h,h',\ell})$$

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial u_\ell}\sum\varrho_{h,h',h''}\Big]$$

arrangeant les termes, on a bien la formule voulue.

$$\frac{\Delta}{\delta}_j = -\Big[i(\Delta+\lambda\varrho_j)-\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big\{\sum_{h\neq j}\varrho_j\Big]-\lambda\sum_{h\neq j}\varrho_{j,h}\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big]$$

$$2i\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h\neq j} i(\varrho_h+\lambda\varrho_{h,j})+\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\sum_{h\neq j}\varrho_{h,j}-\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\sum_{\substack{h,\\ h'\neq j}}(\varrho_{h,h'}+\lambda\varrho_{h,h',j})\Big]$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\Big(\sum_{h\neq j} i(\varrho_h+\lambda\varrho_{h,j})-\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big[\sum_{h,h'}\varrho_{h,h'}\Big]\Big)-\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\,2i\Big[\sum_{h\neq j}(\varrho_n+\lambda\varrho_{h,j})\Big]$$

$$\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)\frac{\partial^2\lambda}{\partial u_j^2}\Big(\sum_{h,h'}\varrho_{h,h'}\Big)-\frac{\partial^3}{\partial u_j^3}\frac{\lambda}{3}\Big(\sum_h\varrho_h\Big)+\Big(\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big)^2\Big[\sum_{h,h'\neq\ell} i(\varrho_{h,h'}+\lambda\varrho_{h,h',j})$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_j}\Big(\sum_{h,h',h''}(\varrho_{h,h',h''})\Big]$$

est la formule cherchée, à l'ordre des termes près.

mme 5.2.

$j_1, j_2, \ldots j_i$ sont transitoires pour la matrice P, alors

$\varrho_{j_1,\ldots j_i}(u) = 0$, pour $\lambda(u) = \lambda_o(u)$

monstration

$_{1},\ldots j_i}(u)$ = déterminant de $\begin{pmatrix} T_1 * Du_t - \lambda_o(u)I, B_* Du_e \\ 0 \qquad R_* Du_e - \lambda_o(u)I \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} T & , & B \\ 0 & , & R \end{pmatrix}$, T_1 est obtenu en supprimant dans T les lignes et

olonnes n° $j_1, \ldots j_i$.

est équivalent de dire $\chi_{j_1,\ldots j_i}(u) = 0$ et de dire qu'il existe

ne solution non identiquement nulle à l'équation

$$\begin{pmatrix} T_1 \times Du_t - \lambda_o(u)I & , & B \times Du_e \\ 0 & & R \times Du_e - \lambda_o(u)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0$$

ui est équivalent à :

$$(T_1 \times Du_t - \lambda_o(u)I)V_1 + (B \times Du_e)\, V_2 = 0$$

$$(R\, Du_e - \lambda_o(u)I)V_2 = 0$$

a valeur propre $\lambda_o(u)$ qui $\longrightarrow 1$ si $u \longrightarrow 0$ est la même pour P et

our R , on le voit en faisant $\{j_i\} = \emptyset$ dans l'équation ci-dessus.

l existe donc $V_2(u), \neq 0$, tel que $(R \times Du_e - \lambda_o(u)I)V_2(u) = 0$. D'autre

art, $\sigma(T_1 \times Du^t) \subset B(o,r)$, où $o < r < 1$

t $|\lambda_o(u)| > 1 - \varepsilon$ pour $\|u\| < \eta$, donc $T_1 \times Du_t - \lambda_o(u)I$ est

nversible et l'on a $V_1(u) = (\lambda_o(u)I - T_1 \times Du_t)^{-1} B \times Du_e(V_2(u))$.

onc, pour $\|u\| < \eta$, $\chi_{j_1,\ldots j_i}(u) = 0$

emme 5.3.

$n^\alpha(P_n - P) \longrightarrow S$, où P vérifie les conditions (I), alors

$$n^\alpha(\chi_{n,j_1,\ldots j_\ell}(u) - \chi_{j_1,\ldots j_\ell}(u)) \longrightarrow B_{j_1,\ldots j_\ell}(u)$$

émonstration.

a différence $\chi_{n,j_1,\ldots j_\ell}(u) - \chi_{j_1,\ldots j_\ell}(u)$ peut s'écrire comme

mme finie de différences des termes correspondants de ces déterminants
veloppés, soit

$$\sum_{\alpha_i} \left({}_n q^{\alpha_2}_{\alpha_1} \; {}_n q^{\alpha_3}_{\alpha_2} \times \cdots\cdots \times {}_n q^{\alpha_{r-\ell}}_{\alpha_{r-\ell-1}} - q^{\alpha_2}_{\alpha_1} \; q^{\alpha_3}_{\alpha_2} \times \cdots\cdots \times q^{\alpha_{r-\ell}}_{\alpha_{r-\ell-1}} \right)$$

$$\sum_{\alpha_i} \left(\left({}_n q^{\alpha_2}_{\alpha_1} - q^{\alpha_2}_{\alpha_1} \right) {}_n q^{\alpha_3}_{\alpha_2} \times \cdots \times {}_n q^{\alpha_{r-\ell}}_{\alpha_{r-\ell-1}} + q^{\alpha_2}_{\alpha_1} \left({}_n q^{\alpha_3}_{\alpha_2} - q^{\alpha_3}_{\alpha_2} \right) \times \cdots \times {}_n q^{\alpha_{r-\ell}}_{\alpha_{r-\ell-1}} \right.$$

$$\left. + \cdots\cdots + q^{\alpha_2}_{\alpha_1} \times \cdots\cdots \times q^{\alpha_{r-\ell-1}}_{\alpha_{r-\ell-2}} \left[{}_n q^{\alpha_{r-\ell}}_{\alpha_{r-\ell-1}} - q^{\alpha_{r-e}}_{\alpha_{r-\ell-1}} \right] \right)$$

proposition sera donc démontrée si $n^{\alpha} \left[{}_n q_i^j - q_i^j \right] \longrightarrow r_i^j$, où

r_i^j est l'élément (i,j) de $(P_n \times Du - \lambda_{o,n,u} I)$

est l'élément (i,j) de $(P \times Du - \lambda_o(u) I)$

$n^{\alpha}(P_n \times Du - \lambda_{o,n,u} I - (P \times Du - \lambda_{o,u} I))$

$= n^{\alpha}(P_n - P), Du) - n^{\alpha}(\lambda_{o,n,u} - \lambda_{o,u}) I$

premier terme tend vers $S \times Du$, uniformement en u .

us montrerons dans le lemme suivant que, uniformément sur $\| u \| < \gamma$,
$(\lambda_{o,n,u} - \lambda_{o,u})$ tend vers une limite $\ell(u)$, et $\lambda_{o,n,u} \longrightarrow \lambda_{o,u}$

ns ces conditions, on voit que

$$\left({}_n \delta_{j_1, \ldots j_\ell}(u) - \delta_{j_1, \ldots j_\ell}(u) \right) \longrightarrow B_{j_1, \ldots j_\ell}(u) \ ,$$

iformement sur $\| u \| < \gamma$

emme 5.4.

$\alpha\left[\lambda_{o,n,u} - \lambda_{o,u}\right] \longrightarrow \ell(u)$ uniformément sur $\|u\| < \eta$

émonstration.

osons $\Delta_n(u,z) = z^r + a_{1,n}(u)z^{r-1} + \ldots + a_{r,n}(u) = (z-\lambda_{o,n,u})\,\Pi_n(z)$

$= \det\left[z\mathbf{I} - P_n \times Du\right]$

$\Delta(u,z) = z^r + \alpha_1^{(u)} z^{r-1} + \ldots\ldots + a_r(u) = (z-\lambda_{o,u})\,\Pi(z)$

$= \det\left[z\mathbf{I} - P\,Du\right]$

$a_{i,n}(u)$ et $a_i(u)$ sont la somme des mineurs centraux d'ordre $r-i$ es déterminants de $-P_n \times Du$ et $-P \times Du$. La différence $n^{\alpha}(a_{i,n}(u) - a_i(u))$ 'exprime danc de manière analogue à celle du lemme précédent, les ermes $q_{n,i}^{j}$ (resp q_i^j) étant les éléments de $-(P_n \times D_u)$ (resp $-P \times Du$)

$\alpha\left[{}_n q_i^j - q_i^j\right] \longrightarrow -s_i^j\, e^{iu_j}$ uniformément en u , où s_i^j est 'élément (i,j) de la matrice S . ${}_n q_i^j(u) \longrightarrow q_i^j(u)$ uniformément en u ; il vient donc

$\alpha\left[a_{i,n}(u) - a_i(u)\right] \longrightarrow b_i(u)$ uniformément en u et

$\alpha\left[\Delta_n(u,z) - \Delta(u,z)\right] \longrightarrow G(z,u) = \sum_{k=1}^{r} z^{r-k} b_k(u)$ uniformément en u

t Z , pour $\|Z\| \leq 1.$, et $b_i(u)$ est une fonction analytique de u

onc, pour $n > N_1(\varepsilon)$, uniformément en u ,

$\alpha\left|\Delta(u,\lambda_{o,n,u}) - G(\lambda_{o,n,u})\right| < \varepsilon$.

'autre part $\lambda_{o,n,u}$ converge vers $\lambda_{o,u}$ uniformément pour $\|u\| < \eta$ ar ce sont des fonctions analytiques de u , uniformément bornées pour $\|u\| < \eta$, par ℓ^{η} , et $\lambda_{o,n,u}$ converge simplement vers $\lambda_{o,u}$

onc $\left| G(\lambda_{o,n,u_,}), -G(\lambda_{o\,(u),u})\right| < \varepsilon$ pour $n > N_2(\varepsilon)$, $\|u\| < \eta$

t $\left|n^{\alpha}\,\Delta(u,\lambda_{o,n,u}) - G(\lambda_{o,u})\right| = \left|n^{\alpha}(\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u})\,\Pi\left[\lambda_{o,n,u}\right] - \dot{\sigma}(\lambda_{o,u})\right| < 2\varepsilon$

r $\Pi(\lambda_{o,n,u}) = \dfrac{\Delta(u,\lambda_{o,n,u}) - \Delta(u,\lambda_{o,u})}{\lambda_{o,n,u} - \lambda_{o,u}}$

$$= \Pi\left[\lambda_{o,u}\right] + \frac{1}{2}\left[\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\Delta(u,z)\right](z=\lambda_{o,u}\ \ \theta(\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}) \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\left|\Pi(\lambda_{o,n,u}) - \Pi(\lambda_{o,u})\right| \leq \frac{1}{2}\left|\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}\right|\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta(u,z)(z=\lambda_{o,u}+\theta(\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u})\right|$$

$\Delta(u,z)$ est un polynome, il est uniformément borné en u et z, pour
: borné, ainsi que ses dérivées secondes.

On a donc $\left|\Pi(\lambda_{o,n,u}) - \Pi(\lambda_{o,n})\right| < \varepsilon$, pour $n > N_z(\varepsilon)$, $\forall u$, et

$$\Pi(\lambda_{o,u}) \neq 0 \text{ , pour } \|u\| < \eta$$

$$n^{\alpha}\left[\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}\right] - \frac{G(u,\lambda_{o,u})}{\Pi(\lambda_{o,u})}\Bigg| < \frac{2\varepsilon}{\Pi(\lambda_{o,n,u})} + \left|G(u,\lambda_{o,u})\right|\left|\frac{1}{\Pi(\lambda_{o,n,u})} - \frac{1}{\Pi(\lambda_{o,u})}\right|$$

$(u,\lambda_{o,u})$ restant borné uniformément pour $\|u\| < \eta$, on a donc,

our $n > N_4(\varepsilon)$ et $\|u\| < \eta$

$$n^{\alpha}(\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}) - \frac{(u,\lambda_{o,u})}{\Pi(\lambda_{o,u})}\Bigg| < \varepsilon$$

onc $n^{\alpha}(\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}) \longrightarrow \ell(u) = \dfrac{G(u,\lambda_o(u))}{\Pi(\lambda_{o,u})}$ uniformément en u ,

our u assez petit. c.q.f.d.

orollaire 5.2.

a) si j est P - transitoire, $n^{\alpha}\dfrac{\partial\lambda_{o,n,u}}{\partial u_j} \longrightarrow \ell_j(u)$ uniformément en u,

$\|u\| < \eta$ - $P_j(u) = \dfrac{\partial \ell}{\partial u_j}(u)$

si j et k sont P - transitoires,

$$n^{\alpha}\frac{\partial\lambda_{o,n,u}}{\partial u_j\,\partial u_k} \to \ell_{j,k}(u) = \frac{\partial^2 \ell}{\partial u_j \partial u_k}(u), \text{ uniformément en } u, \|u\|<\eta$$

si j,ρ,k sont P - transitoires,

$$n^{\alpha}\frac{\partial^3\lambda_{o,n,u}}{\partial u_j\partial u_k\partial u_\rho} \to \ell_{j,\rho,k}(u) = \frac{\partial^3 \ell(u)}{\partial u_j\partial u_k\partial u_\rho}, \text{ uniformément en } u, \|u\|<\eta$$

plus, nous avons

$$\ell_j(u) = \frac{\lambda_o(u)B_j(u)}{\sum_h \varphi_h(u)}, \quad \ell_{j,k}(u) = \frac{1}{\sum_h \varphi_h(u)}\left[-(\lambda_o(u)(B_j(u)+B_k(u))+\lambda^2_{o,u}B_{j,k}(u)\right]$$

$$\ell_j(u)\Big[\sum_{h\neq k}(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}\varphi_{h,j}(u))-i\ell_k(u)(\sum_{h=j}(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}\varphi_{h,k}(u))\Big]$$

$$,_j(u) = \frac{1}{\sum_h \varphi_h(u)}\Big[-\left[\lambda_o(u)B_j(u)\right] - 2i\ell_j(u)\sum_{h\neq j}(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}\varphi_{h,j}(u))\Big]$$

$$,_{\rho,k} = \frac{1}{\sum_h \varphi_h(u)}\Big[-i(\lambda_o(u)\left[B_j(u)B_k(u)+B_\rho(u)\right]+\lambda^2_{o,u}\left[B_{j,k}(u)+B_{j,\rho}(u)+B_{\rho,k}(u)\right]$$

$$+\lambda^3_{o,u}B_{j,k,\rho}(u)\Big]+\ell_\rho(u)\Big[\sum_{h\neq j\neq k}(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}(\varphi_{h,k}(u)+\varphi_{h,j}(u))$$

$$+\lambda^2_{o,u}\varphi_{h,j,k}(u)\Big] + \text{termes symétriques}$$

$$-\ell_{j,k}(u)\Big[\sum_{h\neq j\rho} i(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}\varphi_{h,\rho}(u)\Big]$$

$$+ \text{termes symétriques }\Big]$$

$$,_{j,k} = \frac{1}{\sum_h \varphi_h(u)}\Big[-i\left(\lambda_{o,u}(B_j(u)+B_k(u))+\lambda^2_{o,u}B_{j,k}(u)\right)$$

$$+\ell_k(u)\Big[\sum_{h\neq j}\left(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}\varphi_{h,j}(u)\right)\Big]+2\ell_j(u)\Big[\sum_{h\neq j,h\neq k}(\varphi_h(u)+\lambda_{o,u}(\varphi_{h,j}+\varphi_{h,k})$$

$$+\lambda^2_{o,u}\varphi_{h,k,j}\Big]-\ell_{jj}(u)i\Big[\sum_{h\neq k}(\varphi_h(u)+\lambda_o(u)\varphi_{h,j}(u))-2\ell_{j,k}i\Big[\sum_{h\neq j}\varphi_h(u)$$

$$+\lambda_{o,u}\varphi_{h,j}(u)\Big]$$

$$\ldots_{j,j} = \frac{1}{\sum_h \varrho_h(u)}\Big[-i\lambda_{o,u}B_j(u)+3\ell_j(u)\sum_{h\neq j}(\varrho_h(u)+\lambda_{o,u}\varrho_{h,j}(u)) \\ -3i\ell_{j,j}(u)\Big[\sum_h(\varrho_h+\lambda\varrho_{h,j})\Big]$$

onstration .

j est transitoire P, j et k transitoires P, j,ρ et K transi-
res P, les dérivées partielles correspondantes de $\lambda_{o,u}$ sont nulles,
vertu des formules du corollaire 5.1 et du lemme 5.2 .

$\lambda_{o,n,u}-\lambda_{o,u}$) est une fonction analytique, qui converge uniformément
s $\ell(u)$, analytique également, sur $\|u\|<$ ▽ . Par conséquent, en
tu d'un théorème de Weierstrass, les dérivées partielles convergent
formément, vers les dérivées correspondantes, ce qui est bien la pro-
été voulue.

formules suivantes sont des conséquences immédiates du corollaire
et des lemmes 5.3 et 5.4.

t $s_{i,i}(n)$ le $i^{ème}$ coefficient de la forme quadratique $-\frac{1}{2}\log \phi_n$,
étant la loi limite relative à ℓ_n. Nous supposerons $s_{i,i}(n) \neq 0 \forall n$,
a veut dire que P_n n'a pas d'état transitoire ni d'état singulier
est à dire d'états qui soient eux-mêmes leur propre classe cyclique).
s supposerons de même que P n'a pas d'états singuliers. Alors
$_i(n) \longrightarrow s_{i,i} \neq 0$, sauf si i est P - transitoire.

sidérons les variables aléatoires

$$_n = \frac{\xi_{i,n}-n\,\Pi_{i,n}}{\sqrt{n\,s_{i,i}(n)}}$$; elles sont bien définies et si P n'a pas d'états
nsitoires, elles convergent en loi vers une loi Laplacienne multi-
ensionelle .

P a des états transitoires, si $n^{\alpha}(P_n-P) \longrightarrow S$, où $0 < \alpha < 1$,
si $B_i(u) \neq 0$ pour i-P-transitoire, la loi limite est encore une
Laplacienne multidimensionnelle.

n sait que $s_{i,i}(n) = \left(\frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_i}(o)\right)^2 - \frac{\partial^2 \lambda_{o,n}}{\partial u_i^2}$

$\Rightarrow$ $n^{\alpha} s_{i,i}(n) \longrightarrow - \ell_{i,i}(o)$, pour i transitoire P, en vertu des

emmes précédents.

uisque $\alpha < 1$, on a bien $n\, s_{i,i}(n) \longrightarrow \infty$ dans tous les cas.

ous savons que

$$\left[\exp \sum iu_i\, Y_{i,n} \,\middle|\, X_o = i_o\right] = \left(P_n \times Du_i \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right)^{(n)} V_o \exp\left[- \sum iu_i \frac{\Gamma_{i,n}}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\, n\right]$$

$$\left(P_n \frac{Du_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right)^{(n)} V_o - \left(\lambda_{o,n,u_i} \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right)^{(n)} \Gamma_{n,u_i} \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}} V_o \Big\| \leqslant$$

$$\sum_{\ell=1}^{d-1} \Big\| \Gamma_{n,\varepsilon_\ell,u_i} \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}} V_o \Big\| + M\rho^n, \text{ en vertu du corollaire I,1, où d}$$

st le nombre de classes cycliques de P .

$$\Gamma_{n,\varepsilon,u_i} \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}} V_o \longrightarrow \Gamma_g V_o = 0 \quad \text{si} \quad g = 1,\ldots d-1$$
$$= V_o \quad \text{si} \quad g = 0$$

ous avons donc

$$\left\| \left(P_n \times \frac{Du_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right)^{(n)} V_o - \left(\lambda_{o,n,u_i} \frac{}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right)^{(n)} V_o \right\| \longrightarrow 0$$

ous sommes ramenés à l'étude de la quantité

$$\left(\lambda_{o,n,\frac{u_i}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}}\right)^n \exp\left[- \sum iu_i \frac{\Gamma_{i,n}\, n}{\sqrt{ns_{i,i}(n)}}\right]$$

$$= \exp\left[n \log\left(\lambda_{o,n,u_i}\left(\frac{}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}\right)\right) - \Sigma i\, u_i \sqrt{n}\, \frac{\Pi_{i,n}}{\sqrt{s_{i,i}(n)}} \right]$$

$$g(\lambda_{o,n,v}) = \log(1+Z_{n,v}) = Z_{n,v} - \left(\frac{Z_{n,v}}{2}\right)^2 + O(Z_{n,v})^3 , \text{ où}$$

$$_{,v} = \sum_i v_i \frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial v_i}(o) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \lambda_{o,n,v}(o)}{\partial v_i \partial v_g} v_i v_j +$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 \lambda_{o,n,v}(\theta v_1, \ldots \theta v_r)}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} v_i v_j v_k \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

ous sommes donc amenés à étudier la limite, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de expression

$$\frac{}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}} = n \sum_j i\, \frac{u_j \Pi_{j,n}}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}} - n\left(Z_n, \frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}\right)^2 + n\, O\left(Z_{n,\frac{u_i}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}}}\right)$$

$$\frac{}{\sqrt{n s_{i,i}(n)}} = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n \quad , \text{ où}$$

$$= \sum_i \frac{\partial \lambda_{i,n}}{\partial u_i}(o) \cdot \frac{u_i}{\sqrt{n\, s_{i,i}(n)}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \lambda_{o,n,u}(o)}{\partial u_i \partial u_j} \frac{u_i u_j}{\sqrt{n^2 s_{i,i}(n) s_{j,j}(n)}}$$

$$= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,n} \frac{\partial^3 \lambda_{o,n,u}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \left(\frac{\theta u_i}{\sqrt{n s_{1,1}(n)}}, \ldots \frac{\theta u_\ell}{\sqrt{n s_{\ell,\ell}(n)}} \right)$$

$$\times \frac{u_i u_j u_k}{\sqrt{n^3 s_{i,i}(n) s_{j,j}(n) s_{k,k}(n)}}$$

emme 5.5. $\alpha_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\beta_n = o(\frac{1}{n})$, $\gamma_n = o(\frac{1}{n})$

émonstration .

) on sait que $s_{i,i}(n) \longrightarrow s_{i,i} > 0$ si i est ergodique -P

$n^{\alpha} s_{i,i}(n) \longrightarrow -\ell_{i,i}(o)$ si i est transitoire -P

et $\frac{\partial \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_j} \longrightarrow i\Gamma_j \neq 0$ si j est ergodique P

$\neq 0$ si j est transitoire P

mais $n^{\alpha} \frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_j} \longrightarrow \ell_j \neq 0$

a contribution des termes ergodiques à $\alpha_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, celle des termes ransitoires est

$= o(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_i} \frac{1}{\sqrt{s_{i,i}(n)}}) = o(n^{-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}}) = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

onc $\alpha_n = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

) Si i et j sont ergodiques -P, $s_{i,i}(n)$ et $s_{j,j}(n)$ ont des imites non nulles.

es dérivées partielles tendant vers les dérivées correspondantes de $\lambda_{o,u}$, i a bien la contribution des termes P-ergodiques à $\beta_n = o(\frac{1}{n})$

i est transitoire -P et j ergodique P, alors

$$\frac{\partial^2 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j}(o) \frac{1}{\sqrt{n s_{i,i}(n) n s_{j,j}(n)}} = \frac{1}{n\sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{\frac{\partial \lambda_{o,n,u}}{\partial u_i}}{\sqrt{s_{i,i}(n)}} \right](o)$$

$$\frac{1}{n\sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{n^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i} \lambda_{o,n,u}}{n^{\alpha} \sqrt{s_{i,i}(n)}} \right](o) = \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s_{j,j}(n)}} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{n^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_i} \lambda_{o,n,u}}{\sqrt{n^{\alpha} s_{i,i}(n)}} \right](o)$$

$\frac{\partial}{\partial u_i}\lambda_{o,n,u_i}$ / $\sqrt{n^{\alpha}s_{i,i}(n)}$ est une fonction analytique qui converge vers $\frac{\ell_i(u)}{\sqrt{-\ell_{i,i}(o)}}$

iformément sur $\|u\| < \eta$ .Il y a donc convergence uniforme locale
s dérivées partielles et l'on a bien

$$\frac{\partial^2\lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j} = O(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}) = O(\frac{1}{n})$$

i et j sont P- transitoires, on sait que

$$\frac{\partial^2\lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j}(o) \longrightarrow \ell_{i,j}(o)\ ,\ n^{\alpha}s_{i,i}(n) \longrightarrow -\ell_{i,i}(o), n^{\alpha}s_{j,j}(n) \longrightarrow -\ell_{j,j}(o),$$

ors

$$\frac{n^{\alpha}\frac{\partial^2\lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j}}{\sqrt{n^{\alpha}s_{i,i}(n)n^{\alpha}s_{j,j}(n)}} - \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n})$$

nc $\beta_n = O(\frac{1}{n})$

Si i,j et k sont tous ergodiques -P, la contribution des termes

rrespondants dans $\gamma_n = O(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}) = o(\frac{1}{n})$

i est transitoire P, j et k ergodiques -P, alors

$$\frac{\lambda_{o,n}}{i\partial u_j \partial u_k}(\theta\, u_\rho / \sqrt{n s_{\rho\rho}(n)})\Big) \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)s_{j,j}(n)s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u_i}\lambda_{o,n}(v)}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)\, s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}\right](\theta \frac{u_\rho}{\sqrt{n\, s_{\rho,\rho}(n)}})$$

pour n assez grand, $\left\| \frac{u_\rho}{\sqrt{n s_{\rho\rho}(n)}} \right\| \leq \eta$

La quantité précédente peut s'écrire, en vertu du lemme précédent

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}}(s_{jj}(n)s_{kk}(n))^{\frac{1}{2}}\,(n^{\alpha}s_{i,i}(n))^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\left(n^{\alpha}\frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_i}(v)\right)\left(v=\frac{\theta u_\rho}{\sqrt{n s_{i,i}(\rho)}}\right)$$

$n^{\alpha}\frac{\partial \lambda_{o,n}(v)}{\partial u_i}$ converge vers $\ell_i(v)$, uniformément sur $\|v\| < \eta$

donc $\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\, n^{\alpha}\frac{\partial \lambda_{o,n,v}}{\partial u_i}$ converge vers $\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\,\ell_i(v)$, uniformément sur $\|v\| < \eta$

Donc, si $v_n = \left(\theta\, \frac{u_o}{\sqrt{n\, s_{\rho\rho}(n)}}\right) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\, n^{\alpha}\,\frac{\partial \lambda_{o,n}(v_n)}{\partial u_i} \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k}\,\ell_i(v) \qquad (v=o)$$

Le terme correspondant est donc $0\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Si i et j sont P - transitoires, k ergodique, on a :

$$\frac{\partial^3 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}(v_n)\,\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{i,i}(n)s_{j,j}(n)s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial}{\partial u_k}\,\frac{\left(n^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\lambda_{o,n}(v)\right)}{(n^{\alpha}s_{j,j}\; n^{\alpha}s_{i,i})^{\frac{1}{2}}}$$

$$(v=v_n)\;\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}}}$$

et $n^{\alpha}s_{j,j}(n) \longrightarrow -\ell_{j,j}(o)$, $n^{\alpha}s_{i,i}(n) \longrightarrow -\ell_{i,i}(o)$

$n^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\lambda_{o,n}(v) \longrightarrow +\ell_{i,j}(v)$ uniformément en v , $\|v\| < \eta$

donc $\frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \lambda_{o,n,u}(v_n) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial u_k} \varphi_{i,j}(v) \ (v=o) = \frac{\partial}{\partial u_k} \varphi_{i,j}(o)$

Si i,j,k sont P - transitoires, alors

$n^{\alpha} \frac{\partial^3 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}(v_n) \longrightarrow \varphi_{i,j,k}(o)$, en vertu du corollaire 5.2.

On a donc

$$\frac{\frac{\partial^3 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}(v_n)}{n^2 s_{i,i}(n) s_{j,j}(n) s_{k,k}(n)} - \frac{n^{\alpha} \frac{\partial^3 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}(v_n)}{(n^{\alpha} s_{i,i}(n) n^{\alpha} s_{j,j}(n) n^{\alpha} s_{k,k}(n))^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}}}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}}}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{car} \quad 0 < \alpha < 1 .$$

On a donc bien finalement $\alpha_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $\beta_n = O(\frac{1}{n})$, $\gamma_n = o(\frac{1}{n})$

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 5.1.

Si P a une seule classe ergodique et n'a pas d'états singuliers, mais par contre a des états transitoires,

Si $P_n \longrightarrow P$, P_n n'ayant, pour n assez grand, pas d'états transitoires ni d'états singuliers,

Si $n^{\alpha}(P_n - P) \longrightarrow S \qquad 0 < \alpha < 1$, et si $B_i = \lim n \varphi_i(n) > 0$

pour i transitoire - P , alors la loi de l'ensemble des variables aléatoires $Y_{i,n} = \frac{\xi_{i,n} - n \Pi_{i,n}}{\sqrt{n\, s_{i,i}(n)}}$ tend vers une loi laplacienne multidimensionnelle $L\left[Y_1, \ldots Y_r\right]$.

Les lois marginales sont $N(o,1)$,

$$E\left[Y_i, Y_j\right] = \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i}\, s_{j,j}}} \quad \text{si } i \text{ et } j \text{ sont ergodiques - P}$$

$$= 0 \qquad i \text{ ergodique P , } j \text{ transitoire P}$$

$$= \frac{-\ell_{i,j}(o)}{\sqrt{\ell_{i,i}(o)\,\ell_{j,j}(o)}} \quad i \text{ et } j \text{ transitoires - P .}$$

Démonstration.

Nous avons :

$$n Z_{n,v_n} - n \sum_j i\, u_j \frac{\Pi_{j,n}}{\sqrt{n\, s_{j,j}(n)}} - n \frac{(Z_{n,v_n})^2}{2} + n\, O(Z_{n,v_n})^3$$

$$= n\,(\beta_n + \gamma_n) - \frac{n}{2}\left[\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\right]^2 + n\, O(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n)^3$$

$$= n\left(\beta_n - \frac{\alpha_n^{\,2}}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= n \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \left[\frac{\partial^2 \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_i \partial u_j} \frac{1}{n\sqrt{s_{i,i}(n) s_{j,j}(n)}} - \frac{\partial \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_i} \frac{\partial \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_j} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n\sqrt{s_{i,i}(n) s_{j,j}(n)}} \right] u_i u_j - \frac{1}{2} \sum_i u_i^{\,2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_i u_i^{\,2} + 2 \sum_{i,j} \left[\frac{\partial \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_i} \frac{\partial \lambda_{o,n}(o)}{\partial u_j} - \frac{\partial^2 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j} \right] \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{s_{i,i}(n) s_{j,j}(n)}} \right] u_i\, u_j \right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Si i et j sont P - ergodiques

$$\frac{\frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_i}\,\frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_j} - \frac{\partial^2 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j}}{\sqrt{s_{i,i}(n)\, s_{j,j}(n)}} \longrightarrow \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{i,i} s_{j,j}}}$$

, avec les notations du chapitre 2 relatives à P -

Si i est P - ergodique et j - P transitoire, cette expression $\longrightarrow$ o , car

$$n^{\alpha} \frac{\partial \lambda_{o,n}}{\partial u_j} \longrightarrow \ell_j(o) \quad \text{et} \quad n^{\alpha} \frac{\partial^2 \lambda_{o,n}}{\partial u_i \partial u_j} \to \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\ell_j(v) \right)_{v=o}$$

alors que $n^{\alpha}\, s_{i,i}(n) \longrightarrow$ une limite $\neq o$ par hypothèse, (car $B_i \neq o \Rightarrow - \ell_{i,i}(o) \neq o$; si i n'est pas P - singulier).

Si i et j sont P - transitoires, alors cette expression tend vers

$$\frac{- \ell_{i,j}(o)}{\sqrt{\ell_{i,i}(o)\, \ell_{j,j}(o)}}$$

Donc en vertu de l'expression du vecteur caractéristique des $Y_{i,n}$,

$$E\left[\exp \sum_i i\, u_i\, Y_{i,n} \middle| X_o = i_o \right] \to \exp\left[-\frac{1}{2} \left[\sum_i u_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \in E \\ i<j}} \frac{s_{i,j}}{\sqrt{s_{ii} s_{jj}}}\, u_i u_j - 2 \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{Z} \\ i<j}} \frac{\ell_{i,j}(o)}{\sqrt{\ell_{i,i}(o)\, \ell_{j,j}(o)}} \right] \right].$$

Remarquons que les variables aléatoires limites sur les états ergodiques - P et celles sur les états transitoires - P sont indépendantes.

II - P a plusieurs classes ergodiques.

Supposons que P a deux classes ergodiques, acycliques, et pas d'états transitoires (1).

Soient E_1 et E_2 ces deux classes . P s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_n \begin{pmatrix} R_{1n} & S_n \\ T_n & R_{2n} \end{pmatrix}$$

Soient λ_{1n} et λ_{2n} les valeurs propres maximales de R_{1^n} et R_{2^n} ,

Nous supposerons au dessous de Π_{1n} et Π_{2n} les projecteurs correspondant

$$n\,(1 - \lambda_{1n}) \longrightarrow \infty \qquad (2)$$

$$n\,(1 - \lambda_{2n}) \longrightarrow q \qquad (3)$$

qui contredit l'une des hypothèses du chapitre 3 .

Introduisons maintenant les variables aléatoires suivantes :

a) σ_{1,n,i_o} : temps de séjour de $^{(n)}S$ dans E_1 jusqu'au premier passage dans E_2 , i_o E_1 étant l'état initial

b) V_{1,n,i_o} : nombre d'entrées dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2 de $^{(n)}S$, i_o E_1 étant l'état initial.

c) $^{(n)}\xi_1(n) = \sum_{i \in E_1} {}^{(n)}\xi_i(n)$

d) η_{n,i_o} : nombre de passages dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2 de $^{(n)}S$, i_o E_1 étant l'état initial.

Lemme 5.6. Dans les conditions (1)

$(1 - \lambda_{1n})\,\sigma_{1,n,i_o} \xrightarrow{L} X$, loi exponentielle de fonction caractéristique $\dfrac{1}{1 - i\,u}$.

Démenstration .

$$\Pr\left[\left\{\sigma_{1,n,i_o} = j\right\}\right] = (R_{1^n})^{j-1}\, S_n\, V_o{}^2\ (i_o)$$

$$E\left[\exp\left(i\,u\,(1 - \lambda_{1n})\,\sigma_{1,n,i_o}\right)\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(i(u\,j(1 - \lambda_{1,n})\right)(R_{1^n})^{j-1}\, S_n\, V_o{}^2\ (i_o)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \exp(iju(1-\lambda_{1n})) \left[(\lambda_{1n})^{j-1} \Pi_{1n} S_n V_o^2 + R_n^{(j-1)} S_n V_o^2 \right] \quad (io)$$

où $\| R_n^{(j)} \| \leq M \rho^j$

Or $S_n V_o^2 + R_{1n} V_o^1 = V_o^1 \Rightarrow \Pi_{1n} S_n V_o^2 + \Pi_{1n} R_{1n} V_o^1 = \Pi_{1n} V_o^1$

$$\Rightarrow \Pi_{1n} S_n V_o^2 = (1 - \lambda_{1n}) \Pi_{1n} V_o^1$$

d'où

$$E\left[\exp(iu\ \sigma_{1,n,io}(1-\lambda_{1n}))\right] = \sum_{j=i}^{\infty} \exp(iju(1-\lambda_{1n})) \left((\lambda_{1n})^{j-1} (1-\lambda_{1n}) \Pi_{1n} V_o^1(io) \right) + \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_n \leq \frac{M}{1-\rho} \| S_n \| \longrightarrow 0$$

Or $\Pi_{1n} V_o^1 \longrightarrow V_o^1$ et, en posant $f(x) = x \exp i u(1 - x)$

$$\sum_{j=i}^{\infty} \exp\left(i\, j\, u\, (1-\lambda_{1n}) \right) (\lambda_{1n})^{j-1} (1-\lambda_{1n}) = \frac{1}{\lambda_{1n}} f(\lambda_{1n}) \frac{(1 - \lambda_{1n})}{f(1)-f(\lambda_{1n})}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1-iu}$$ fonction caractéristique d'une loi exponentielle de densité e^{-x}.

c.q.f.d.

Posons $P_{j_1,\ldots j_k} = (I - R_{1n})^{-1} S_n (R_{2n})^{j_1-1} T_n (I - R_{1n})^{-1} S_n (R_{2n})^{j_2-1} T_{n_x} \ldots$

$$5 \times (I - R_{1n})^{-1} S_n (R_{2n})^{j_k-1} T_n$$

$$d(\xi, \eta) = \sum_k \left| \Pr\{\xi = k\} - \Pr\{\eta = k\} \right|$$, où ξ et η

sont deux variables aléatoires à valeurs entières.

Lemme 5.7. Si (1) et (3) ont lieu.

(a) $P_r\left[\left\{V_{1,n,io} = \ell\right\}\right] = \sum_{j_i} P_{j_1,\ldots j_\ell}\left[I - R_{1n}\right]^{-1} S_n(R_{2n})^{j_{\ell+1}-1} V_o^2(io)$

avec $j_1 + j_r + \ldots + j_{\ell+1} = n + 1$

(b) $d\left[V_{1,n,io}, V'_{1,n}\right] \longrightarrow 0$, où V'_1, n est la somme de n variables aléatoires indépendantes, pouvant prendre prendre les valeurs 1 et o avec les probabilités respectives $(1 - \lambda_{2n})$ et λ_{2n}. Cette loi est la loi des entrées dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2 pour la chaîne de Markov à deux états. E_1 et E_2 de matrice de transition

$$p_n = \begin{pmatrix} \lambda_{1n}, & 1-\lambda_{1n} \\ 1-\lambda_{2n}, & \lambda_{2n} \end{pmatrix} .$$

Nous désignons par $^{(n)}s$ le système associé à p_n.

Démonstration

a) la formule indiquée dans (a) s'obtient immédiatement en décomposant l'évènement $\left[V_{1,n,io} = \ell\right]$ selon les temps de séjour successifs dans les classes ergodiques E_1 et E_2, puis en additionnant les probabilités correspondantes.

La sommation sur les temps de séjour dans E_1 donne le résultat.

b) $P_r\left[\left\{V' = \ell\right\}\right]$ peut s'écrire :

$$\sum_{j_i} (\lambda_{2n})^{j_1-1}(1-\lambda_{2n})(\lambda_{2n})^{j_2-1}(1-\lambda_{2n})\times\ldots\times(\lambda_{2n})^{j_\ell-1}(1-\lambda_{2n})(\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1}$$

où $j_1 + j_2 + \ldots + j_{\ell+1} = n + 1$

$$P_r\left[\left\{V_{1,n,io}=\ell\right\}\right] - P_r\left[\left\{V'_{1,n}=\ell\right\}\right] = \sum_{j_i} P_{j_1,\ldots j_\ell} (I - R_{1n})^{-1} S_n$$

$$\times\left[(R_{2n})^{j_{\ell+1}-1} V_o^2 - (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1} V_o^2\right] + \sum_{j_i} P_{j_1,\ldots j_{\ell-1}} (I - R_{1n})^{-1} S_n \left[(R_{2n})^{j_\ell - 1} T_n V_o^1\right.$$

$$\left. -(\lambda_{2n})^{j_\ell - 1} (1-\lambda_{2n}) V_o^2\right] \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1} + \ldots + \sum_{j_i} P_{j_1,\ldots j_k} (I - R_{1n})^{-1} S_n \times \left[(R_{2n})^{j_{k+1}-1} T_n V_o^1\right.$$

$$\left. -(\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{2n}) V_o^2\right] \times (\lambda_{2n})^{j_{k+2}-1} (1-\lambda_{2n}) \times \ldots \times (\lambda_{2n})^{j_{k+i}-1} (1-\lambda_{2n}) \times \ldots \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1} + \ldots\ldots +$$

$$(I - R_{1n})^{-1} S_n \left[(R_{2n})^{j_1-1} T_n V_o^1 - (\lambda_{2n})^{j_1-1} (1-\lambda_{2n}) V_o^2\right]\left[(\lambda_{2n})^{j_2-1} (1-\lambda_{2n}) \times \ldots \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1}\right]$$

Les réductions successives apparaissent dans cette formule sont dues à la relation

$$(I - R_{1n})^{-1} S_n V_o^2 = V_o^1$$

La différence $P\left[\left\{V_{1,n,io}=\ell\right\}\right] - P\left[\left\{V'_{1,n}=\ell\right\}\right]$ est donc formée de $\ell + 1$ sommes, chacune étant du type :

$$\sum_{j_i} P_{j_1,\ldots j_k} (I - R_{1n})^{-1} S_n \varepsilon_{2^{j_{k+1}}} \Gamma_{j_{k+2},\ldots, j_{\ell+1}}$$

On a

$$\varepsilon_{2^{j_{k+1}}} = (\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{2n})(\Gamma_{2n} - \Gamma_2) V_o^2 + O(\rho^{j_{k+1}-1}) T_n V_o^1$$

puisque $\Gamma_{2n} T_n V_o^1 = (1-\lambda_{2n}) \Gamma_{2n} V_o^2$ et $(R_{2n})^j = (\lambda_{2n})^j \Gamma_{2n} + O(\rho^j)$

D'où $\left\| \varepsilon_{2^{j_{k+1}}} \right\| \leq (\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{2n}) \left\| \Gamma_{2n} - \Gamma_2 \right\| + K_2 \rho^{j_{k+1}-1} \left\| T_n V_o^1 \right\|$ (4)

onc

$$\| \sum_{j_i} P_{j_i,\dots j_k} (I^1_{1}-R_n)^{-1} S_n (\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{2n})(\Gamma_{2n}-\Gamma_2) V_o^2 \, \Gamma_{j_{k+2}} \cdots j_{l+\ell} \|$$

$$\leq \sum_{j_i} \| P_{j_1 \cdots j_k} (I^1_{1}-R_n)^{-1} S_n \| \, (\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{2n}) \Gamma_{j_{k+2} \cdots j_{l+\ell}} \times \| \Gamma_{2n}-\Gamma_2 \|$$

$$\leq \| T_n \|^k (1-\lambda_{2n})^{\ell-k} C_n^{\ell} \| \Gamma_{2n} - \Gamma_2 \|$$

ar $\| (I^1_{1}-R_n)^{-1} S_n \| = \| (I-R_{1n})^{-1} S_n V_o^2 \| = 1$, et $|\lambda_{in}| \leq 1$

'hypothèse $n(1-\lambda_{2n}) \longrightarrow q$ entraine $\| nT_n \|$ et $| n(1-\lambda_{2n}) | < K$,

n vertu des relations $\begin{cases} T_n V_o^1 + R_{2n} V_o^2 = V_o^2 \implies \\ n \Gamma_{2n} T_n V_o^1 = n(1-\lambda_{2n}) \Gamma_{2n} V_o^2 \quad \text{et} \quad \Gamma_{2n} \to \Gamma_2 > 0 \end{cases}$

'où :

$$\sum_i \| P_{j_1 \cdots j_k} (I^1_{1}-R_n)^{-1} S_n \| \, (\lambda_{2n})^{j_{k+1}-1} (1-\lambda_{\ell n}) \Gamma_{j_{k+2},\dots,j_{\ell+1}} \| \Gamma_{2n} - \Gamma_2 \|$$

$$\leq \frac{K^\ell}{n^\ell} C_n^{\ell} \| \Gamma_{2n} - \Gamma_2 \| \leq \frac{K^\ell}{\ell!} \| \Gamma_{2n} - \Gamma_2 \|$$

$$\sum_{j_i} \| P_{j_i,\dots j_k} (I-R_{1n})^{-1} S_n \| K_2 \rho^{j_{k+1}-1} \| T_n V_o^1 \| \times \Gamma_{j_{k+2},\dots j_{\ell+1}}$$

$$\leq \frac{K^\ell}{n^\ell} K_2 \sum_{j=0}^{n-\ell} C_{n-j-1}^{\ell-1} \rho^j \leq \frac{K^\ell}{n^\ell} C_n^{\ell-1} \frac{K_2}{1-\rho} \leq \frac{K^\ell}{(\ell-1)!} \frac{K_2}{n(1-\rho)}$$

c) $\sum_{j_i} P_{j_1,\dots j_\ell} (I - R_1^n)^{-1} S_n \left[(R_2^n)^{j_{\ell+1}} V_o^2 - (\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}} V_o^2 \right]$

$$= \sum_{j_i} P_{j_1,\dots j_\ell} (I - R_1^n)^{-1} S_n \left[(\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}} (\square_2^n - \square_2) V_o^2 + O(\rho^{j_{\ell+1}}) V_o^2 \right]$$

est en norme $\leqslant \frac{K^\ell}{\ell!} \| \square_2^n - \square_2 \| + \frac{K^\ell}{(\ell-1)!} \frac{K_2}{n(1-\rho)}$, en vertu de raisonnements analogues aux précédents.

On a donc finalement :

$$\left| Pr\left[\left\{V_{1,n,io} = \ell\right\}\right] - Pr\left[\left\{V'_{1,n} = \ell\right\}\right] \right| \leqslant \frac{(\ell+1)K^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \left[\frac{\| \square_2^n - \square_2 \|}{\ell} + \frac{B}{n} \right]$$

Donc $\leqslant \frac{K^{\ell-1}}{\ell!} (\ell+1) \| \square_2^n - \square_2 \| + \frac{(\ell+1)K^{\ell+1}}{(\ell-1)!} \frac{B}{n}$, avec $B = \frac{K_2}{1-\rho}$

$\sum_{\ell=1}^{\infty} K^{\ell-1} \frac{(\ell+1)}{\ell!}$ et $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ell+1)K^{\ell+1}}{(\ell-1)!}$ sont les termes généraux de séries convergentes en ℓ . Puisque $\| \square_2^n - \square_2 \| \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$ et $\frac{B}{n}$ également, on a bien $d\left[V_{1,n,io} - V'_{1,n} \right] \longrightarrow 0$

Lemme 5.8 si (1) est vérifié

Soient $\tau_{1,n,io}$, $\tau_{2,n,io}, \dots \tau_{k,n,io}$ les temps de séjour successifs dans E_1, $\tau'_{1,n}, \dots \tau'_{2,n}, \dots \tau'_{k,n}$ les temps de séjour successifs dans l'état E_1 pour la chaine à 2 états de loi d'évolution p_n, E_1 étant l'état initial, alors

$$\sum_{\sigma_1,\dots\sigma_j} \left| \Pr\left[\left\{\tau_{1,n,io} = \sigma_1, \dots \tau_{j,n,io} = \sigma_j\right\}\right] - \Pr\left[\left\{\tau'_{1,n} = \sigma_1, \dots \tau'_{j,n} = \sigma_j\right\}\right] \right|$$

$$\leqslant j\left(\left\| \Pi_1^n - \Pi_1 \right\| + \frac{K_1}{1-\rho} \left\| S_n \right\| \right) \text{ (où } K_1 \text{ est une certaine constante), donc}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

Démonstration.

$$\Pr\left[\left\{\tau_{1,n,io} = \sigma_1, \dots \tau_{j,n,io} = \sigma_j\right\}\right] = (R_1^n)^{\sigma_1 - 1} S_n (I - R_2^n)^{-1} T_n \times \cdots$$

$$(R_1^n)^{\sigma_j - 1} S_n V_o^2 \ .$$

$$\Pr\left[\left\{\tau'_{1,n} = \sigma_1, \dots \tau'_{j,n} = \sigma_j\right\}\right] = (\lambda_1^n)^{\sigma_1 - 1}(1-\lambda_1^n)(\lambda_1^n)^{\sigma_2 - 1}(1-\lambda_1^n) \times \cdots$$

$$(\lambda_1^n)^{\sigma_j - 1}(1-\lambda_1^n)$$

$$\Pr\left[\left\{\tau_{1,n,io} = \sigma_1, \dots \tau_{j,n,io} = \sigma_j\right\}\right] - \Pr\left[\left\{\tau'_{1,n} = \sigma_1 \dots \tau'_{j,n} = \sigma_j\right\}\right]$$

$$= (R_1^n)^{\sigma_1 - 1} S_n (I - R_2^n)^{-1} T_n \times \cdots \times (I - R_2^n)^{-1} T_n \left[(R_1^n)^{\sigma_j - 1} S_n V_o^2 - (\lambda_1^n)^{\sigma_j - 1}(1-\lambda_1^n) V_o^1 \right]$$

$$+ (R_1^n)^{\sigma_1 - 1} S_n (I - R_2^n)^{-1} T_n \times \cdots \times \left[I - R_2^n \right]^{-1} T_n \left[(R_1^n)^{\sigma_{j-1} - 1} S_n V_o^2 - (\lambda_1^n)^{\sigma_{j-1} - 1}(1-\lambda_1^n) V_o^1 \right.$$

$$(\lambda_1^n)^{\sigma_j - 1}(1-\lambda_1^n) + \cdots + (R_1^n)^{\sigma_1 - 1} S_n \left[I - R_2^n \right]^{-1} T_n \times \cdots \times$$

$$\left[(R_1^n)^{\sigma_k - 1} S_n V_o^2 - (\lambda_1^n)^{\sigma_k - 1}(1-\lambda_1^n) V_o^1 \right] (\lambda_1^n)^{\sigma_{k+1} - 1}(1-\lambda_1^n) \times \cdots \times (\lambda_1^n)^{\sigma_j - 1}(1-\lambda_1^n) +$$

$$\cdots \left[(R_1^n)^{\sigma_1 - 1} S_n V_o^2 - (\lambda_1^n)^{\sigma_1 - 1}(1-\lambda_1^n) V_o^1 \right] (\lambda_1^n)^{\sigma_2 - 1}(1-\lambda_1^n) \times \cdots \times (\lambda_1^n)^{\sigma_j - 1}(1-\lambda_1^n)$$

Posons

$$\mathcal{E}_{1,\sigma} = (R_{1n})^{\sigma-1} S_n V_o^2 - (\lambda_{1n})^{\sigma-1}(1-\lambda_{1n})V_o^1$$

de même que pour $\mathcal{E}_{2,j}$, on a

$$\mathcal{E}_{1,\sigma} = (\lambda_{1n})^{\sigma-1}(1-\lambda_{1n})(\Pi_{1n} - \Pi_1)V_o^1 + O(\rho^{\sigma-1})S_n V_o^2 \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \rho < 1$$

Puisque $\| R_{1n} \|$, $\| S_n \|$ et $\| (I^2 - R_{2n})^{-1} T_n \| \leqslant 1$, on a immédiatement :

$$\left| \Pr\left[\left\{ \tau_{i,n,io}=\sigma_1, \ldots \tau_{j,n,io}=\sigma_j \right\} \right] - \Pr\left[\left\{ \tau'_{1,n}=\sigma_1, \ldots \tau'_{j,n}=\sigma_j \right\} \right] \right| \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{j} \| \mathcal{E}_{1,\sigma_k} \|$$

$$\sum_{\sigma_1,..\sigma_j} \sum_{k=1}^{j} \| \mathcal{E}_{1,\sigma_k} \| \leqslant j \Big(\sum_{\sigma} (\lambda_{1n})^{\sigma-1}(1-\lambda_{1n}) \| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| + K_1 \rho^{\sigma-1} \| S_n \| \Big)$$

$$\leqslant j \Big(\| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| + \frac{K_1}{1-\rho} \| S_n \| \Big)$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty$$

On a bien montré le lemme.

Lemme 5.9 Si (1) et (3) ont lieu

Soit Z_n le nombre de passages de $^{(n)}s$ dans E_1 jusqu'au $(n+1)^{\text{ième}}$ passage dans E_2, E_1 étant l'état initial.

$d\left[\eta_{n,io}, Z_n\right] \longrightarrow 0$.

Démonstration .

$$\sum_k \left| \Pr\left[\left\{ \eta_{n,io}=k \right\} \right] - \Pr\left[\left\{ Z_n=k \right\} \right] \right| \leqslant \sum_k \sum_{\ell} \left| \Pr\left[\left\{ \eta_{n,io}=k, V_{n,io}=\ell \right\} \right] \right.$$

$$\left. - \Pr\left[\left\{ Z_n=k, V'_n=\ell \right\} \right] \right| \quad .$$

Or

$$\Pr\left[\{\eta_{n,io}=k, V_{n,io}=\ell\}\right] = \Pr\left[\{\tau_{o,n}+\tau_{1,n}+\ldots+\tau_{\ell,n}=k, V_{n,io}=\ell\}\right]$$

$$= \sum_{j_i,\sigma_i} (R_n)_1^{\sigma_o-1} (S_n(R_n)_2^{j_1-1} T_n (R_n)_1^{\sigma_1-1} S_n(R_n)_2^{j_2-1} T_n \ldots (R_n)_1^{\sigma_\ell-1} S_n(R_n)_2^{j_{\ell+1}-1}$$

$$V_o^2(i_o)$$

où $j_1 + j_2 + \ldots + j_{\ell+1} = n+1$

$\sigma_o + \sigma_1 + \ldots + \sigma_\ell = k$

$$\Pr\left[Z_n = k\ ,\ V'_n = \ell\right] = \sum_{j_i,\sigma_i} (\lambda_n)_1^{\sigma_o-1}(1-\lambda_n)_1(\lambda_n)_2^{j_1-1}(1-\lambda_n)_2 \ldots$$

$$(\lambda_n)_1^{\sigma_\ell-1}(1-\lambda_n)_1(\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1} \quad \therefore \text{ D'où par différences successives,}$$

on a :

$\Pr\left[\eta_{n,io}= k\ ,\ V_{n,io}=\ell\right] - \Pr\left[Z_n = k\ ,\ V'_n = \ell\right]$, lorsque i_o varie, est le vecteur :

$$\sum_{j_i,\sigma_i}\Big[(R_n)_1^{\sigma_o-1} S_n(R_n)_2^{j_1-1} T_n \times \ldots \times \left[(R_n)_2^{j_{\ell+1}-1} V_o^2 - (\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1}\right] + (R_n)_1^{\sigma_o-1} S_n$$

$$\times \ldots \times \Big((R_n)_1^{\sigma_\ell-1} S_n\, V_o^2 - (\lambda_n)_1^{\sigma_\ell-1}(1-\lambda_n)_1 V_o^1\ (\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1} + \ldots$$

$$+ (R_n)_1^{\sigma_o-1} S_n(R_n)_2^{j_1-1} T_n \times \ldots \times (R_n)_1^{\sigma_i-1} S_n\, V_o^2 - (\lambda_n)_1^{\sigma_i-1}(1-\lambda_n)_1 V_o^1)\Big]$$

$$\times(\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1}(1-\lambda_n)_2 \times \ldots \times (\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1} + \ldots + (R_n)_1^{\sigma_o-1} S_n(R_n)_2^{j_1-1} T_n$$

$$\times \ldots \times \left[(R_n)_2^{j_i-1} T_n\, V_o^1 - (\lambda_n)_2^{j_i-1}(1-\lambda_n)_2\, V_o^2\right] \times (\lambda_n)_1^{\sigma_i-1}(1-\lambda_n)_1$$

$$\times(\lambda_n)_2^{j_{i+1}-1}(1-\lambda_n)_2 \times \ldots \times (\lambda_n)_2^{j_{\ell+1}-1} + \ldots\ldots\ldots$$

On voit qu'apparaissent des termes de deux types : le premier type comprendra en facteur $\mathcal{E}_1,\sigma$, le second $\mathcal{E}_2,j$, avec les notations des lemmes précédents.

Nous avons, on le sait

$$\| \mathcal{E}_1,\sigma \| \leq (\lambda_1^n)^{\sigma-1}(1-\lambda_1^n)\| \Gamma_1^n - \Gamma_1 \| + K_1\rho^{\sigma-1}\| S_n\|$$

$$\| \mathcal{E}_2,j \| \leq (\lambda_2^n)^{j-1}(1-\lambda_2^n)\| \Gamma_2^n - \Gamma_2 \| + K_2\rho^{j-1}\| T_n\|$$

On sait que $d\left[\eta_{n,i_o}, Z_n\right] \leq \sum_{\ell=o}^{n}\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\Big| \Pr\left[\left\{\eta_{n,i_o}=k, V_{n,i_o}=\ell\right\}\right]$

$-\Pr\left[\left\{Z_n=k, V'_n=\ell\right\}\right]$. Evaluons $\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\Big| \Pr\left[\left\{\eta_{n,i_o}k, V_{n,i_o}=\ell\right\}\right]$

$$-\Pr\left[\left\{Z_n=k, V'_n=\ell\right\}\right]\Big|.$$

cette dernière quantité est en plus égale à

$$\sum_{k=\ell+1}^{\infty}\sum_{j_i}\sum_{\sigma_i}\Big|(R_1^n)^{\sigma_o-1}S_n\times\ldots\times\mathcal{E}_{1,\sigma_i}(i_o)\Big|(\lambda_2^n)^{j_{i-1}-1}(1-\lambda_2^n)(\lambda_1^n)^{\sigma_{i+1}-1}$$

$$(1-\lambda_1^n)\times\ldots\times(\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}-1}$$

$$+\sum_{k=\ell+1}\sum_{j_i}\sum_{\sigma_i}\Big|(R_1^n)^{\sigma_o-1}S_n\times\ldots\times\mathcal{E}_{2,j_i}(i_o)\Big|(\lambda_1^n)^{\sigma_i-1}(1-\lambda_1^n)\times\ldots\times(\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}-1}\Big|$$

mais

$$\Big|(R_1^n)^{\sigma_o-1}S_n(R_2^n)^{j_1-1}T_n\times\ldots\times\mathcal{E}_{1,\sigma_i})(i_o)\,(\lambda_2^n)^{j_{i+1}-1}(1-\lambda_2^n)\times\ldots\times(\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}-1}$$

$$\leq (R_1^n)^{\sigma_o-1}S_n(R_2^n)^{j_1-1}T_n\times\ldots\times(R_2^n)^{j_i}T_n V_o^1)(i_o)\times\|\mathcal{E}_1,\sigma_i\|\times(\lambda_2^n)^{j_i-1}(1-\lambda_2^n)$$

$$(\lambda_1^n)^{\sigma_{i+1}-1}(1-\lambda_1^n)\times\ldots\times(\lambda_2^n)^{j_{\ell+1}-1} = a_1,n,\sigma_i,j_i$$

Sommer sur k et σ_i revenant à sommer sur σ sans condition, il vient

$$\sum_k \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} a_{1,n,\sigma_i,j_i} = \sum_{j_i} (I - R_{1n})^{-1} S_n (R_{2n})^{j_1} T_n \times \dots \times (R_{2n})^{j_i} T_n V_o^1(i_o)$$

$$\times \left(\sum_\sigma \| \varepsilon_{1,\sigma} \| \right) \times (\lambda_{2n})^{j_{i+1}-1} (1-\lambda_{2n}) \times (\lambda_{2n})^{j_{i+2}-1} (1-\lambda_{2n}) \times \dots \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1}$$

Puisque $\| nTn \| \leq K$, $(n(1-\lambda_{2n}) \leq K$, $\| (I-R_{1n})^{-1} S_n \| = 1$

$$\sum_o \| \varepsilon_{1,\sigma} \| \leq \| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| + \frac{K_1}{1-\rho} \| S_n \| \quad , \quad \| R_{2n} \| \leq 1 \ , \ | \lambda_{in} | < 1$$

Il vient

$$\sum_k \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} a_{1,n,\sigma_i,j_i} \leq \frac{C_n^\ell}{n^\ell} K^\ell \left[\| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| + \frac{K_1}{1-\rho} \| S_n \| \right]$$

$$\leq \frac{K^\ell}{\ell!} \left[\| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| + \frac{K_1}{1-\rho} \| S_n \| \right]$$

Les termes du type (2) ont un module $\leq a_{2,n,\sigma_i,j_i}$, où

$$a_{2,n,\sigma_i,j_i} = (R_{1n})^{\sigma_o - 1} S_n (R_{2n})^{j_1 - 1} T_n \times \dots \times (R_{1n})^{\sigma_{i-1}-1} S_n V_o^2(i_o) \times \| \varepsilon_{2,j_i} \|$$

$$\times (\lambda_{1n})^{\sigma_i - 1} (1-\lambda_{1n}) \times \dots \times (\lambda_{2n})^{j_{i+1}-1} (1-\lambda_{2n}) \times \dots \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1}$$

dont la somme sur σ_i et k donne

$$((I-R_{1n})^{-1} S_n (R_{2n})^{j_1 - 1} T_n \times \dots \times (I-R_{1n})^{-1} S_n V_o^2(i_o)) \times \| \varepsilon_{2,j_i} \| (\lambda_{2n})^{j_{i+1}}$$

$$(1-\lambda_{2n}) \times \dots \times (\lambda_{2n})^{j_{\ell+1}-1} \quad , \text{ termes dont nous avons majoré la } \sum_{j_i} \text{ au}$$

lemme 5.7 par $\frac{K^\ell}{(\ell-1)!} \left[\frac{1}{\ell} \| \Pi_{2n} - \Pi_2 \| + \frac{K_2}{n(1-\rho)} \right]$

Puisqu'il y a $\ell+1$ termes de chaque type, il vient donc :

$$\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \left| \Pr\left[\{ \gamma_{n,i_o} = k, V_{n,i_o} = \ell \} \right] - \Pr\left[\{ Z_n = k, V'_n = \ell \} \right] \right| \leq \frac{K^\ell}{(\ell-1)!} \left[\frac{\ell+1}{\ell} \| \Pi_{1n} - \Pi_1 \| \right.$$

$$\left. + \frac{\ell+1}{\ell} \| \frac{S_n}{1-\rho} \| + \frac{\ell+1}{\ell} \| \Pi_{2n} - \Pi_2 + \frac{K_2(\ell+1)}{n(1-\rho)} \right]$$

somme de termes généraux de séries absolument convergentes en ρ, multipliés par un facteur qui $\longrightarrow 0$

Donc $d\left[\eta_{n,i_o}, \xi_n\right] \to 0$

Lemme 5.10 Si (1) (2) (3) ont lieu.

Si $\overset{(n)}{\xi}_1(n,i_o)$ désigne le nombre de passages dans E_1 au bout de n épreuves, i_o étant l'état initial.

$$d\left[\overset{(n)}{\xi}_1 n,i_o \;,\; \eta\, n,i_o\right] \longrightarrow 0$$

Démonstration.

On sait que $d(\xi,\eta) \leq 2\,\Pr\left[\left\{\xi \neq \eta\right\}\right]$, si ξ et η sont des variables aléatoires à valeurs entières.

Il nous suffit donc de montrer que

$$\Pr\left[\left\{\eta_{n,i_o} \neq \overset{(n)}{\xi}_1 n,i_o\right\}\right] \longrightarrow 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty$$

L'évènement $\left\{\eta_{n,i_o} \neq \overset{(n)}{\xi}_1 n,i_o\right\}$ signifie que sur l'intervalle de temps n+1, n+2, ...,n+ η_{n,i_o}, le système $\overset{(n)}{\zeta}$ est allé au moins une fois dans E_1. Soit K_{n,i_o} le nombre d'entrées dans E_1 sur l'intervalle de temps précédent.

Nous avons évidemment l'implication

$$\left\{\eta_{n,i_o} \neq \overset{(n)}{\xi}_1 n,i_o\right\} \Rightarrow \left\{K_{n,i_o} > 0 \;\; \overset{(n)}{X}_{n+1} \in E_2\right\} \text{ ou } \left\{\overset{(n)}{X}_{n+1} \in E_1\right\}$$

$$\Pr\left[\left\{K_{n,i_o} > 0 \;,\; \overset{(n)}{X}_{n+1} \in E_2\right\}\right] = \sum_{j \in E_2} \Pr\left[\left\{K_{n,i_o} > 0,\; \overset{(n)}{X}_{n+1} = j\right\}\right]$$

$$= \sum_{j \in E_2} P_n^{(n+1)}(i_o,j)\, \Pr\left[\left\{K_{n,i_o} > 0\right\} / \left\{\overset{(n)}{X}_{(n+1)} = j\right\}\right]$$

$$\Pr\left[\left\{{}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\right\}\right] = \sum_{j \in E_1} (P_n)^{(n+1)}(i_o, j)$$

Soit $n + \tau_{i,n}$ l'instant où E_2 est atteint pour la $i^{ème}$ fois sur l'intervalle de temps $n+1, \ldots n+\gamma_n$. Sur cet intervalle, E_2 est atteint ${}^{(n)}\xi_{1\,n,i_o}$ fois.

Considérons la variable aléatoire $Y_{i,n} = \left|\left[\left\{X_{n+\tau_i+1} \in E_1\right\}\right]\right.$

$$K_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{{}^{(n)}\xi_{1\,n,i_o}}$$

$$E\left[Y_i \Big/ \left\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\right\}\right] = \sum_{j \in E_2} \Pr\left[{}^{(n)}X_{n+\tau_i} = j \Big/ {}^{(n)}X_{n+1} = j\right] \cdot T_n V_o(j) \leq \left\| T_n V_o^1 \right\|$$

Car $\tau_i + n$ est un temps défini sur les évènements qui lui sont antérieurs.

$$E\left[K_n \Big/ \left\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\right\}\right] \leq E\left[{}^{(n)}\xi_{1\,n,i_o}\right] \times \left\| T_n V_o^1 \right\|$$

Y_i et ${}^{(n)}\xi_{1}(n)i_o)$ sont indépendantes, ${}^{(n)}X_{n+1}$ étant donné.

Puisque ${}^{(n)}\xi_{1\,n,i_o} \leq \gamma_{n,i_o}$, nous avons :

$$\Pr\left[K_{n,i_o} > 0 \Big/ \left\{{}^{(n)}X_{n+1} = j\right\}\right] < E\left[K_n \Big/ {}^{(n)}X_{n+1} = j\right] \leq E\left[\gamma_{n,i_o}\right] \times \left\| T_n V_o^1 \right\|$$

D'autre part :

$$\Pr\left[\left\{{}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\right\} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\right] = \sum_{i=o}^{n-2} \Pr\left[\left\{{}^{(n)}X_{n-i} \in E_2, \right.\right.$$

$$\left.{}^{(n)}X_{n-i+1} \in E_1, {}^{(n)}X_{n-i+2} \in E_1, \ldots {}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\right\} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\Big]$$

$$+ \Pr\left[\left\{{}^{(n)}X_1 \in E_1, \ldots {}^{(n)}X_{n+1} \in E_1\right\} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\right]$$

$$= \sum_{j \in E_2} \sum_{i=o}^{n-2} \Pr\left[\left\{{}^{(n)}X_{n-i} = j\right\} \Big/ \left\{{}^{(n)}X_o = i_o\right\}\right] \times T_n ({}_1R_n)^i V_o^1(j) + ({}_1R_n)^{(n)} V_o(i_o)$$

$$\leq \sum_{j\in E_2} T_n \left[I^1 - R_{1n} \right]^{-1} V_o^1(j) + \left\| (R_{1n})^n V_o \right\|$$

or $(I^1 - R_{1n})^{-1} V_o^1 = \frac{E(\lambda_{1n})}{1-\lambda_{1n}} V_o^1 + \int_{E^*(o,\rho)} \frac{1}{i-\lambda} R(\lambda, R_{1n}) d\lambda \times V_o^1$

en vertu des résultats du chapitre 1.

où $0 < \rho < 1$, $R(\lambda, R_{1n}) = (\lambda I^1 - R_{1n})^{-1}$

$$T_n \frac{E(\lambda_{1n})\, V_o^1}{1-\lambda_{1n}} = \frac{n\, T_n\, E(\lambda_{1n})\, V_o^1}{n(1-\lambda_{1n})} \longrightarrow 0 \text{ , car } n\, T_n \text{ reste borné,}$$

$E(\lambda_{1n})\, V_o^1 \longrightarrow V_o^1$ et $n(1-\lambda_{1n}) \longrightarrow \infty$

D'autre part

$$\int_{B^*(o,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} R(\lambda, R_{1n}) d\lambda \; V_o^1 \to \int_{B^*(o,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} R(\lambda, R_1) d\lambda \; V_o^1 = 0$$

Donc $T_n \int_{B^*(o,\rho)} \frac{1}{1-\lambda} R(\lambda, R_{1n}) d\lambda \, V_o^1 \longrightarrow 0$ et $T_n \left[I^1 - R_{1n} \right]^{-1} V_o^1 \longrightarrow 0$

$(R_{1n})^n V_o^1 = (\lambda_{1n})^n E(\lambda_{1n}) V_o^1 + O(\rho^n) \longrightarrow 0$, car $n(1-\lambda_{1n}) \longrightarrow \infty$

Donc $\Pr\left[\left\{ {}^{(n)}X_{n+1} \in E_1 \right\} \Big/ \left\{ {}^{(n)}X_o = i_o \right\} \right] \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$

Evaluons maintenant $E\left[\eta_{n,i_o} \right]$

$$E\left[\eta_{n,i_o} \right] = \sum_{k,\ell} k \Pr\left[\eta_{n,i_o} = k \, , \, V_{n,i_o} = \ell \right]$$

$$\Pr\left[\left\{ \eta_{n,i_o} = k \, , \, V_{n,i_o} = \ell \right\} \right] = \sum_{\sigma_i, j_i} (R_{1n})^{\sigma_o - 1} S_n (R_{2n})^{j_1 - 1} T_n (R_{1n})^{\sigma_1 - 1} S_n (R_{2n})^{j_2 - 1} T_n$$

$$\cdots \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1} V_o^2 (i_o)$$

$j_1 + j_2 + \cdots + j_{\ell+1} = n+1$, $\sigma_o + \sigma_1 + \cdots + \sigma_\ell = k$. Donc on a $E\left[\gamma_{n,i_\sigma}\right]$

$$= \sum_{\ell} \sum_{k} \sum_{\sigma_i} \sum_{j_i} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma_o - 1} S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_1 - 1} T_n \underset{1}{(R_n)}^{\sigma_1 - 1} S_n \times \cdots \times \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1} V_o^2(i_o)$$

$$\times \left[\sigma_o + \sigma_1 + \cdots + \sigma_\ell\right]$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{j_i} \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma-1} \sigma\right] S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_1-1} T_n \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma-1}\right] S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_2-1} T_n \cdots$$

$$\times \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma-1}\right] S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_i-1} T_n \cdots \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1} V_o^2 + \cdots + \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma-1}\right]$$

$$S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_i-1} T_n \cdots \left[\sum_{\sigma=1}^{\infty} \underset{1}{(R_n)}^{\sigma-1} \sigma\right] S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_i-1} T_n \cdots \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1}$$

$$V_o^2 + \cdots \Big]$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{j_i} \Big[\underset{1}{(I - R_n)}^{(-2)} S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_1-1} T_n \underset{1}{(I - R_n)}^{(-1)} S_n \cdots \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1} V_o^2$$

$$+ \cdots + \underset{1}{(I - R_n)}^{-1} S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_1-1} T_n \cdots \left[I - \underset{1}{R_n}\right]^{(-2)} S_n \underset{2}{(R_n)}^{j_i-1}$$

$$T_n \cdots \underset{2}{(R_n)}^{j_{\ell+1}-1} V_o^2 + \cdots$$

Puisque $\| (1-R_n)^{-1} S_n \| = 1$ et $\| n\, T_n \| \leq K$, il vient :

$$E\left[\gamma_{n,i_o}\right] \leq \sum_{\ell=o}^{\infty} \frac{K^\ell}{\ell!}\, \ell \,\| (I - R_n)^{-1} \|$$

Or $\| (I - R_n)^{-1} \| = \| (I - R_n)^{-1} V_o^1 \|$

Il suffit de montrer que $\dfrac{\| (I - R_n)^{-1} V_o^1 \|}{n} \to 0$ si $n \to \infty$, puisque $n\, T_n$ reste borné.

uisque $(I^1 - R_{1^n})^{-1} V_o^1 = \Pi_{1\,n} V_o^1 \frac{1}{1-\lambda_{1^n}} + \int_{B^*(o,\rho)} \frac{R(\lambda, R_{1^n}) d\lambda}{1-\lambda}$

t que $n(1-\lambda_{1^n}) \longrightarrow \infty$) On a bien le résultat.

orollaire

$\left[{}^{(n)}\xi_{1^n,i_o}, Z_n\right] \longrightarrow 0$

monstration.

$\left[{}^{(n)}\xi_{1^n,i_o}, Z_n\right] \leq d\left[{}^{(n)}\xi_{1^n,i_o}, \eta_{n,i_o}\right] + d(\eta_{n,i_o}, Z_n)$. les lemmes 5.9 5.10 donnent alors le résultat .

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 5.2.

Si $P_n \longrightarrow P$, P ayant deux classes ergodiques, acycliques et pas d'états transitoires

Si $n(1-\lambda_{1^n}) \longrightarrow \infty$, $n(1-\lambda_{2^n}) \longrightarrow q$,

La variable aléatoire : $(1-\lambda_{1^n})\,{}^{(n)}\xi_{1^n,i_o}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z , de fonction caractéristique $\exp i\left(\frac{uq}{1-iu}\right)$

Cette loi limite est celle trouvée par Dobrouchine pour le nombre de passages par E_1 en n épreuves du système ${}^{(n)}s$.

Démonstration.

Puisque $d\left[{}^{(n)}\xi_{1^n,i_o}, Z_n\right] \longrightarrow 0$, toute loi limite pour ξ_n est loi limite pour Z_n avec les mêmes normalisations.

Or Dobrouchine a montré que sous les conditions du théorème, $(1-\lambda_{1n})Z_n$ converge en loi vers Z. Reprenons la démonstration :

$Z_n = \tau'_{0,n} + \tau'_{1,n} + \dots + \tau'_{V_{1,n},n}$, avec les notations précédentes.

Les variables aléatoires τ'_i sont indépendantes , τ'_i et $V'_{1,n}$ également, pour tout i .

$V'_{i,n}$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes, prenant les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives $1-\lambda_{2n}$ et λ_{2n}

Soit $G_n(z)$ la fonction génératrice de $V'_{1,n}$. En vertu de l'hypothèse $n(1-\lambda_{2n}) \longrightarrow q$, $G_n(z) \longrightarrow G(Z) = \exp q(Z-1)$, fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre q .

D'autre part, $(1-\lambda_{1n})\tau'_{i,n}$ converge en loi vers la loi exponentielle de fonction caractéristique $\varphi(u) = \frac{1}{1-u_i}$, en vertu des lemmes 5.6 et 5.8.

Donc $E\left[\exp\ i\,u\,(1-\lambda_{1n})\left(\sum_{j=1}^{V'_{1n}} \tau'_{j,n}\right)\right]$

$$= \sum_k \Pr\left[V'_{1,n} = k\right] (\varphi_n(u))^k = G_n(\varphi_n(u))$$

$$\longrightarrow G(\varphi(u)) = \exp q\left[\frac{1}{1-iu} - 1\right] = \exp\left(\frac{i\,u\,q}{1-i\,u}\right)$$

$\varphi_n(u)$ désignant la fonction caractéristique de $(1-\lambda_{1n})\tau'_{i,n}$

BIBLIOCRAPHIE

A. Blanc, Lapierre et R.Fortet.
Théorie des fonctions aléatoires. Paris (1953) Masson et C^ie

K.L.Chung.
Markov chains with stationary probability transitions. Berlin.(1961) Springer.

R.L.Dobroushin.
Lois limites pour des chaines de Markov. (Isv.Akad.Nauk SSSR, 17.4.1953. p. 291.329)

W.Doeblin
Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaines simples.
Bull. Math. de la Soc. Rou. des Sci. 1937. Tome 39.1 p.51-115
Tome 39.2 p. 3-61

N.Dunford et J.T.Schwartz
Linear operators 1958. (Interscience publishers, New-York)

W.Feller.
An introduction to probability theory and its applications. (1957. New-York (Wiley))

R.Fortet.
Cours de 3° cycle à la Faculté des Sciences de Paris.

M.Frechet.
Théorie des évènements en chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles.(Paris. Gauthier Villars. 1952)

F.R.Gantmacher.
Matrix theory. (New-York (Chelsea publ.Company). 1959.

B.V.Gnedenko, A.N.Kolmogoroff.
Limit distributions for sums of independant random variables. (1949). Traduction anglaise en 1954 (Addison Wesley Publ. Cambridge 42, Mass.)

A.A.Ilyachenko
Lois limites pour des chaines de Markov.(Ukr.Mat.Journal, T.X, n°1. 1958 p. 23-35)

A.N.Kolmogoroff.

- Chaines de Markov avec un ensemble dénombrable d'états possibles.(Bull.de l'Univ.de Moscou A. 1.3. 1937)
- Quelques travaux récents sur les théorèmes limites dans la théorie des probabilités.(Bull. de l'Univ. de Moscou n°10. 1953 p. 29)

B.O.Koopmann.

A generalisation of Poisson distribution for Markov chains. (Proc.Nat.Acad.Sci. 36. 1950. 202-207)

M.Loeve.

Probability Theory. (Van Nostrand Ed. 1955)

Meshalkin.

Théorèmes limites pour des chaines de Markov à nombre fini d'états. (Théorie des probabilités et ses applications. Vol.3 n°4. 1958. Traduction américaine p.335-357)

G.Mihoc.

Lois limites pour des vecteurs aléatoires en chaine de Markov. (Théorie des probabilités et ses applications. Vol. 1,N° 1. 1956. p.92-100(édition Russe))

O.Onicescu, G.Mihoc.

Calcul des probabilités.(1959. Editions d'Etat Roumaines)

Yu.V.Prohorof.

Convergence des processus stochastiques et théorèmes limites en théorie des probabilités. (Théorie des probabilités et ses applications. Vol. 2. 1957. Traduction américaine. p. 138-171)

-:-:-:-:-:-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

CATÉGORIE DES FONCTEURS TYPES

Vu et approuvé :
Paris, le 23 mai 1962.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. ZAMANSKY.

Vu
t Permis d'imprimer :

:teur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE.